$\boxed{B}$ Recherche d'extrema locaux

$\longrightarrow$ on peut utiliser un DL de f en a pour déterminer la nature de l'extremum local $f(a)$.

On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert Ω
et $a \in \Omega$ vérifie $\boxed{f'(a) = 0}$.

1. On suppose que f admet un DL d'ordre 2 en a

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_2(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x-a), \qquad \varepsilon(x-a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0,$$

avec $\alpha_2 \neq 0$, alors on pose

$$d(x) = f(x) - \alpha_0 = \alpha_2(x-a)^2 + \underbrace{(x-a)^2\varepsilon(x-a)}_{\text{négligeable}}$$

(a) $\alpha_2 > 0 \Rightarrow d(x) \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant \alpha_0 = f(a) \Rightarrow f(a)$ est un minimum local.
(b) $\alpha_2 < 0 \Rightarrow d(x) \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant \alpha_0 = f(a) \Rightarrow f(a)$ est un maximum local.

2. On suppose que f admet un DL d'ordre 3 en a

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_3(x-a)^3 + (x-a)^3\varepsilon(x-a), \qquad \varepsilon(x-a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0,$$

avec $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 \neq 0$, alors on pose $d(x) = f(x) - \alpha_0 = \alpha_3(x-a)^3 + (x-a)^3\varepsilon(x-a)$.
La différence change de signe en a càd qu'on a tantôt $f(x) \geqslant f(a)$ puis $f(x) \leqslant f(a)$.
Donc $f(a)$ n'est pas un extremum local.

Exercice : On considère la fonction définie par $f(x) = x(\ln x)^2$ sur $\Omega =]0, +\infty[$.
Déterminer les éventuels extrema locaux de f.

correction : La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω donc on peut utiliser la formule de T-Y.

1. On commence par résoudre l'équation $f'(a) = 0$ qui est une condition nécessaire pour être un extremum local.

2. On détermine un DL à un ordre suffisant de f en chacun des deux points et on conclut.

$$f(x) = [\text{ DL d'ordre 1}] + [\text{ 1 terme supplémentaire}] + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x-a)}_{\text{négligeable}}$$

V Applications des développements limités

$\boxed{C}$ Etude des asymptotes en $\pm\infty$

Proposition (développement limité en $\pm\infty$)

Soit g une fonction définie au voisinage de 0 admettant un DL à l'ordre n en $a = 0$

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Alors la fonction définie par $G(x) = g(\frac{1}{x})$ admet un développement limité en $\pm\infty$ et on écrit

$$G(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x}).$$

Applications à la recherche d'asymptote.

Supposons qu'une fonction f admette une asymptote horizontale ou oblique en $\pm\infty$. On souhaite déterminer l'équation de son asymptote et sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$.

1. On pose $G(x) = \frac{f(x)}{x}$ et on détermine la fonction g telle que $g(\frac{1}{x}) = G(x)$.
2. On détermine un DL de $g(t)$ à un ordre suffisant en $a = 0$.

$$g(t) = [\alpha_0 + \alpha_1 t] + [\text{ 1 terme supplémentaire}] + \underbrace{t^n \varepsilon(t)}_{\text{négligeable}}$$

3. On en déduit le développement asymptotique de $f(x)$ en $\pm\infty$ par changement de variable $t = \frac{1}{x}$.

$$f(x) = [\alpha_0 x + \alpha_1] + [\text{ 1 terme supplémentaire}] + \underbrace{\frac{1}{x^{n-1}}\varepsilon(\frac{1}{x})}_{\text{négligeable}}$$

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.
Déterminer l'équation de ses asymptotes en $\pm\infty$ et leur position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$.

correction :