V Fonctions logarithme népérien et exponentielle

A Fonction logarithme népérien

Definition

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. $\forall x > 0$, on pose $\boxed{\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt}$.

La fonction ainsi définie est alors au moins de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\mathbf{\ln' x = \frac{1}{x}}$ et $\mathbf{\ln 1 = 0}$.

sens de variation : $\forall x > 0,\ \ln' x > 0$. Donc **ln est strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

Exercice : Montrer que $\boxed{\ln 4 > 1}$, puis en déduire qu'$\exists\, e \in]1, 4[,\ \ln e = 1$.

Theorem

① $\forall\, a > 0,\ \ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$ ② $\forall\, a, b > 0,\ \ln(ab) = \ln a + \ln b.$

preuve :① On a $\ln \frac{1}{a} = \displaystyle\int_1^{\frac{1}{a}} \frac{1}{t}\,dt$. On effectue le chang^{t} de var. $t = \frac{1}{u}$. Alors,

② On a $\ln ab = \displaystyle\int_1^{ab} \frac{1}{t}\,dt$. On effectue le changement de variable $t = av$. Alors,

Corollary

① $\forall\, a, b > 0,\ \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ ② $\forall\, a > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ \ln a^n = n \ln a$ ③ $\forall\, x, y > 0,\ \ln x^y = y \ln x.$

$\boxed{B}$ Fonction exponentielle

Definition

La fonction ln est continue, dérivable et strictement croissante ($\ln' x > 0$) sur $\Omega =]0, +\infty[$. De plus, $\mathrm{Im} \ln = \mathbb{R}$. Elle admet donc une application réciproque, appelée **exponentielle** et notée $\mathbf{exp}$, elle-même continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{Im}\ \exp = \Omega =]0, +\infty[$. On a

$$\boxed{y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \exp y = x}.$$

Fonction dérivée : $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exp'(y) = \frac{1}{\ln'(\exp y)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp y}} = \exp y$.

Valeurs particulières : $\ln 1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{exp\,0 = 1}$ et $\ln e = 1 \Leftrightarrow \mathbf{exp\,1} = \boldsymbol{e}$.

Corollary

① $\forall\, x, x' \in \mathbb{R},\ \mathbf{exp}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = (\mathbf{exp}\,\boldsymbol{x}) \times (\mathbf{exp}\,\boldsymbol{x}')$

② $\forall\, x, x' \in \mathbb{R},\ \mathbf{exp}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \frac{\mathbf{exp}\,\boldsymbol{x}}{\mathbf{exp}\,\boldsymbol{x}'}$

③ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ \mathbf{exp}(\boldsymbol{nx}) = (\mathbf{exp}\,\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$

④ $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \mathbf{exp}(\boldsymbol{xy}) = (\mathbf{exp}\,\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{y}}$.

preuve : ① et ② On pose $a = \exp x > 0$ et $b = \exp x' > 0$. On a alors $\ln a = x$ et $\ln b = x'$.

$$\ln ab = \ln a + \ln b \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \Leftrightarrow$$