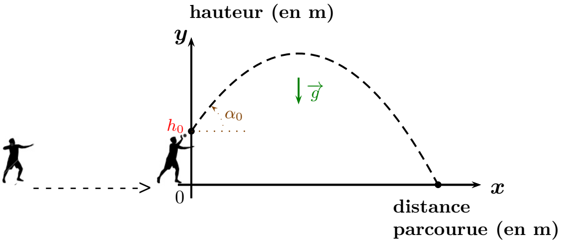
Exemples d'équations différentielles linéaires

1 Le lancer de poids

On lance le poids de *masse* m **à une** *altitude* h_0 **avec une** *vitesse initiale* v_0 **dans une direction qui fait un** *angle* α_0 **avec l'horizontale.**

Ce poids est soumis à la *pesanteur* $\vec{g} = -g\vec{j}$



Conditions initiales : $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha_0 \\ v_0 \sin\alpha_0 \end{pmatrix}$

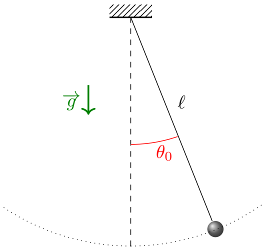
2[nde] **loi de Newton ou Principe fondamental de la dynamique :** $m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha_0 \\ -gt + v_0 \sin\alpha_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \cos\alpha_0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha_0 + h_0 \end{pmatrix}}$$

→ **unicité de la trajectoire étant données les conditions initiales.**

Exemples d'équations différentielles linéaires

2 Le pendule simple



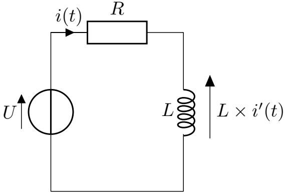
- m masse du pendule
- ℓ longueur de la tige
- $\vec{g} = -g\,\vec{j}$ la pesanteur
- $\theta(t)$ angle avec la verticale *(l'inconnue)*
- $\vec{P} = m\vec{g}$ poids
- $\vec{T}$ tension de la tige

Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$

qui devient $m\ell\theta''(t) = -mg\sin(\theta(t))$ *(par projection sur la tangente)*

Or $\sin x \underset{x\approx 0}{\approx} x \quad\Rightarrow\quad \boxed{\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0}$ et $\theta(t=0) = \theta_0$

3 Circuit RL (résistance+bobine)



- L inductance de la bobine
- R résistance
- $U(t)$ tension électrique générée
- $i(t)$ intensité du courant électrique *(l'inconnue)*

Loi d'additivité des tensions : $\boxed{L\,i'(t) + R\,i(t) = U(t)}$

Vocabulaire

Rappel : $y^{(n)}$, pour $n \in \mathbb{N}$, désigne la dérivée n-ième de la fonction y.

Definition

1. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre n** toute équation de la forme

$$(\#) \qquad a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)y(t) = b(t)\ , \quad t \in I$$

où les fonctions $a_0, \ldots, a_n$ et b sont connues et définies sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

2. **Une solution est un couple (y, J) où $J \subset I$ est un intervalle et y satisfait $(\#)$ pour tout $t \in J$.**
3. La fonction b est appelée **second membre**
4. Si $b = 0$, on dit que l'équation est **homogène**
5. On dit que $(\bar{y}, \bar{J})$ est une **solution maximale** de $(\#)$ s'il n'existe pas d'autre solution (y, J) telle que

$$\bar{J} \subsetneq J \quad \text{et } \bar{y} = y_{|\bar{J}}.$$

En particulier, si $\bar{J} = I$ alors $(\bar{y}, \bar{J})$ est maximale.

VI Équations différentielles linéaires du premier ordre

Objectif : Résoudre les équations différentielles de la forme $\boxed{y'(t) = a(t)y(t) + b(t)}$, $t \in I$ d'inconnue y où a et b sont deux fonctions connues, définies et continues sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Proposition (équation homogène)

*Soit a une fonction continue sur I. Alors les solutions de l'équation homogène $\boxed{y'(t) = a(t)y(t)}$ sont de la forme $\boxed{y_h(t) = Ce^{A(t)},\ t \in I}$, où **A est une primitive arbitraire de a** définie sur I et $C \in \mathbb{R}$.*

preuve :

Proposition (variation de la constante)

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.

Une solution particulière de l’équation différentielle avec second membre $\boxed{y'(t) = a(t)y(t) + b(t)}$ *est*

$\boxed{y_p(t) = \varphi(t)e^{A(t)}\ ,\ t \in I}$ *où*

$$\varphi(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\,dt \qquad \textit{(une primitive particulière).}$$

preuve :

⚠ On choisit une primitive arbitraire φ de $b(t)e^{-A(t)}$ et non la forme générale.

Proposition (superposition des solutions)

Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.

Toute solution de l'équation différentielle avec second membre $\boxed{y'(t) = a(t)y(t) + b(t)}$ *est de la forme* $\boxed{y = y_h + y_p}$ *où* y_h *est une solution de l'équation homogène et* y_p *est une solution paticulière.*

preuve :

Definition (Problème de Cauchy)

On appelle **problème de Cauchy linéaire du 1er ordre**, **la donnée d'une équation différentielle linéaire du premier ordre et d'une condition initiale** :

$$\begin{cases} a_0(t)y'(t) + a_1(t)y(t) = b(t), & t \in I \\ y(t_0) = y_0, & \text{avec } t_0 \in I \text{ et } y_0 \in \mathbb{R} \text{ donnés.} \end{cases}$$

Exercice : Déterminer la forme générale des solutions de $\boxed{(t+1)y'(t)+y(t)=t+1\,,\quad t\in\mathbb{R}}$.

1. On isole y' :

2. Intervalles de résolution : on pose $a(t) = -\frac{1}{1+t}$ et $b(t) = 1$.

   Les fonctions a et b sont toutes deux définies et continues sur $\boxed{J_1 = \qquad\qquad \text{ou } J_2 = \qquad\qquad}$.

3. Solution de l'équation homogène : une primitive de a est la fonction définie par $A(t) =$.
   La forme générale des solutions de l'équation homogène est

   $$y_h =$$

4. Solution particulière : on pose $y_p(t) =$. Alors

5. Forme générale des solutions sur J_1 ou J_2 : $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \begin{cases} & \text{si } t \in J_1 \\ & \text{si } t \in J_2 \end{cases}$

6. Prolongement en une solution maximale sur $\mathbb{R}$: y est prolongeable en une solution définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si

Exercice : Montrer que **tout problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 à coefficient constant** $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t) + b(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) = y_0, & t_0 \in \mathbb{R} \text{ et } y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où b est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$, **admet une unique solution** de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :

A. Forme générale des solutions de l'équation homogène :

B. Solution particulière :

C. Solution du problème de Cauchy : $y = y_h + y_p$ sachant que $y(t_0) = y_0$.

Conclusion : Le problème admet une unique solution $\boxed{y(t) = \qquad}$