VII Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

A Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Definition

1. On appelle **cosinus hyperbolique** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. On appelle **sinus hyperbolique** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Fonctions dérivées : Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x > 0.$$

Tableaux de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh}'(x)$			$+$		
$\operatorname{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow$

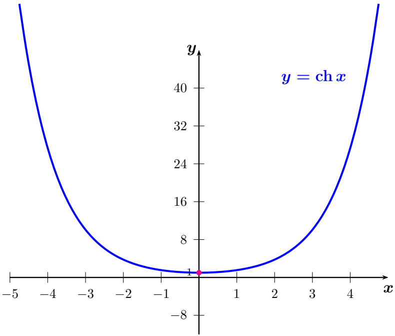
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\operatorname{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Proposition

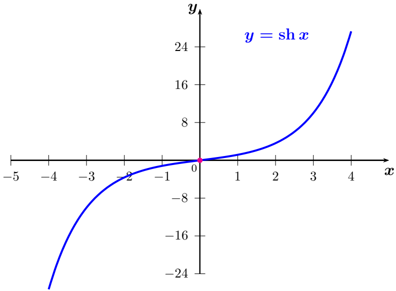
① $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{ch}^2 x - \mathbf{sh}^2 x = 1$ ② $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{ch}\, x + \mathbf{sh}\, x = e^x$.

preuve :① $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x =$

② $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x =$



également appelée courbe de la chaînette



MT 22 : • Les points de coordonnées $(a\cos t, b\sin t)$ sont situés sur l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

• Les points de coordonnées $(a\,\mathrm{ch}\, t, b\,\mathrm{sh}\, t)$ sont situés sur l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

B Fonction Argument sinus hyperbolique

Definition

La fonction sh est continue, dérivable et strictement croissante ($\mathrm{sh}'x > 0$) sur $\mathbb{R}$. De plus, $\mathrm{Im}\,\mathrm{sh} = \mathbb{R}$. Elle admet donc une application réciproque, appelée **argument sinus hyperpolique** et notée **Argsh**, elle-même continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{Im}\,\mathrm{Argsh} = \mathbb{R}$. On a

$$\boxed{y = \mathrm{sh}\,x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Argsh}\,y = x}.$$

Expression algébrique : • $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{sh}^2 x \quad \Rightarrow \quad \mathbf{ch}\,\boldsymbol{x} = \sqrt{\mathbf{1 + sh^2}\boldsymbol{x}}$

• $\boldsymbol{y} = \mathbf{sh}\,\boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{ch}\,\boldsymbol{x} = \sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{y}^2}$

• $\mathbf{ch}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{sh}\,\boldsymbol{x} = e^x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{y}^2} + \boldsymbol{y} = e^x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln(\sqrt{1 + y^2} + y) = x = \mathrm{Argsh}\,y}$

Fonction dérivée : $\mathrm{Argsh}'y = \dfrac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{Argsh(y)})} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh(y)})}$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{Argsh}\,\boldsymbol{y}$ et $\mathrm{ch}\,x = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 x} \quad \Rightarrow \quad y = \mathrm{sh}\,x$ et $\mathbf{ch}\,\boldsymbol{x} = \sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{y}^2}$.

D'où

$$\boxed{\mathrm{Argsh}'y = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}}.$$

Definition

La fonction ch est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable et strictement croissante ($\mathrm{ch}'x > 0$ sur $]0,+\infty[$). De plus, $\mathrm{Im}\,\mathrm{ch}_{|[0,+\infty[} = [1,+\infty[$. Elle admet donc une application réciproque, appelée **argument cosinus hyperpolique** et notée **Argch**, elle-même continue sur $[1,+\infty[$ et dérivable sur $]1,+\infty[$ et strictement croissante avec $\mathrm{Im}\,\mathrm{Argch} = [0,+\infty[$. On a

$$\boxed{y = \mathrm{ch}\,x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Argch}\,y = x}.$$

Expression algébrique : • $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}^2 x - 1 \quad \underset{\mathrm{sh}\,x \geqslant 0}{\Rightarrow} \quad \mathbf{sh}\,\boldsymbol{x} = \sqrt{\mathbf{ch}^2\boldsymbol{x} - \mathbf{1}}$

• $\boldsymbol{y} = \mathbf{ch}\,\boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{sh}\,\boldsymbol{x} = \sqrt{\boldsymbol{y}^2 - \mathbf{1}}$

• $\mathbf{ch}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{sh}\,\boldsymbol{x} = e^x \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y} + \sqrt{\boldsymbol{y}^2 - \mathbf{1}} = e^x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = x = \mathrm{Argch}\,y}$

Fonction dérivée : $\mathrm{Argch}'y = \dfrac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{Argch(y)})} = \dfrac{1}{\mathrm{sh(Argch(y))}}$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{Argch}\,\boldsymbol{y}$ et $\mathrm{sh}\,x = \sqrt{\mathrm{ch}^2 x - 1} \quad \Rightarrow \quad y = \mathrm{ch}\,x$ et $\mathbf{sh}\,\boldsymbol{x} = \sqrt{\boldsymbol{y}^2 - \mathbf{1}}$.

D'où

$$\boxed{\mathrm{Argch}'y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}}.$$

Exercice 1. Déterminer la forme générale des primitives de Argsh et Argch

Exercice A.2.25. questions 2 et 3.