Chapitre 4. Exercice A.2.12

1. On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est définie et continue sur $[a\,;b]$. Par hypothèse, $\forall x \in [a\,;b]$, $a \leq f(x) \leq b$. En particulier, on a $a \leq f(a)$ et $f(b) \leq b$ ce qui se traduit par $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. On distingue les trois cas suivants :

(i) si $g(a) = 0$ alors $x = a$ est solution de l'équation $f(x) = x$;

(ii) si $g(b) = 0$ alors $x = b$ est solution de l'équation $f(x) = x$;

(iii) si $g(a) < 0 < g(b)$, alors d'après le T.V.I. $\exists c \in]a\,;b[\,, g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

2. L'existence d'un point fixe est justifié à la question **1.**
On démontre l'unicité par l'absurde : soit $x_1, x_2 \in [a, b]$ deux points fixes distincts de f, càd $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$ et $x_1 \neq x_2$. l'hypothèse sur f entraîne une absurdité :

$$\Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2| \quad \Rightarrow \quad 1 < 1$$

Par conséquent $x_1 = x_2$. Il y a bien unicité du point fixe.

3. L'existence d'un point fixe est justifié à la question **1.**
On démontre l'unicité par l'absurde : soit $x_1, x_2 \in [a, b]$ deux points fixes distincts de f, càd $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$ et $x_1 \neq x_2$. l'hypothèse sur f entraîne une absurdité :

$$\bullet \text{ soit } \boxed{x_1 < x_2} \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2) \quad \Rightarrow \boxed{x_1 \geq x_2}$$

$$\bullet \text{ soit } \boxed{x_2 < x_1} \quad \Rightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1) \quad \Rightarrow \boxed{x_2 \geq x_1}$$

Dans tous les cas on aboutit à la proposition $P \Rightarrow \text{non}\, P$ qui n'est vraie que si P est fausse. Par conséquent $x_1 = x_2$. Il y a bien unicité du point fixe.

4. Non, il suffit de considérer la fonction définie par $f(x) = x + 1$:

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 0$$

Il n'y a aucune solution sur tout intervalle fermé non borné $[a, +\infty[$.
Pourtant on a bien $\operatorname{Im} f = [a + 1, +\infty[\subset [a, +\infty[$.

Chapitre 4. Exercice A.2.9

• Comme f est une application continue sur $\mathbb{R}$, on sai que sont image $\operatorname{Im} f$ est un intervalle. Les limites généralisées, indiquent que $\operatorname{Im} f$ n'est ni minoré, ni majoré. Un tel intervalle est $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$. Comme $0 \in \operatorname{Im} f$, on en déduit qu' $\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

• Soit p une fonction polynomiale de degré impair :

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}$, n impair, $a_n \neq 0$ et $(a_n, \ldots, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La fonction p est continue sur $\mathbb{R}$.
Si $a_n > 0$ alors

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty.$$

D'après ce qui précède, le polynôme p admet au moins une racine.
Si $a_n < 0$ alors

$$\lim_{x \to +\infty} -p(x) = -(-\infty) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} -p(x) = -(+\infty) = -\infty.$$

D'après ce qui précède, $-p(x) = 0$ admet au moins une solution donc $p(x) = 0$ aussi. Autrement dit, le polynôme p admet au moins une racine.
<u>Conclusion :</u> tout polynôme de degré impair admet au moins une racine.

Exercice 1 - Final MT90 A15 Soit f la fonction définie sur $\Omega =]-\frac{\pi}{2};0[\cup]0;\frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}.$$

1. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ à préciser.
   Correction : On sait que la fonction f est continue sur $]-\frac{\pi}{2};0[\cup]0;\frac{\pi}{2}[$. Il faut montrer que la fonction f admet une limite finie en 0. On a
   $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \\ &= \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \end{aligned}$$
   Les fonctions sin et cos sont continues en 0 donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\sin 0}{1+\cos 0} = \frac{0}{2} = 0.$
   On conclut que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en la fonction $\tilde{f}$ définie et continue sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par
   $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. Montrer que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0, puis préciser la valeur de $\tilde{f}'(0)$.
   Correction : On doit montrer que le taux d'accroissement de la fonction $\tilde{f}$ en 0 admet une limite. On calcule :
   $$\frac{\tilde{f}(0+h)-\tilde{f}(0)}{h} = \frac{\frac{1-\cos h}{\sin h} - 0}{h} = \frac{1-\cos h}{h\sin h} = \frac{1-\cos h}{h \sin h} \times \frac{h}{h} = \frac{1-\cos h}{h^2} \times \frac{h}{\sin h}$$
   On utilise les résultats du cours : $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{h\to 0} \frac{h}{\sin h} = 1$ pour en déduire que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(0+h)-\tilde{f}(0)}{h} = \frac{1}{2}$.

3. Justifier que $\tilde{f}$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, puis calculer $\tilde{f}'(x)$.
   Correction : On vient de montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0. Les fonctions sin et tan sont dérivables sur $]-\frac{\pi}{2};0[\cup]0;\frac{\pi}{2}[$ et ne s'annulent pas donc la fonction $\tilde{f}$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};0[\cup]0;\frac{\pi}{2}[$. La fonction $\tilde{f}$ est donc dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. On calcule :
   $$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$
   La fonction $\tilde{f}'$ est donc définie par
   $$\tilde{f}'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

4. La fonction $\tilde{f}'$ est-elle continue sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$? Justifier votre réponse.
   Correction : La fonction $\tilde{f}'$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2};0[\cup]0;\frac{\pi}{2}[$ car cos et sin sont continues et sin ne s'annule pas sur cet ensemble. Il reste à vérifier si $\lim_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = \tilde{f}'(0)$. On écrit pour $x \neq 0$:
   $$\tilde{f}'(x) = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \times \frac{x^2}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \times \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$
   On utilise les résultats du cours : $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ pour en déduire que $\lim_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2} = \tilde{f}'(0)$. On conclut que la fonction $\tilde{f}'$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.