

Chapitre 1. Corrigés des exercices.

Exercice A.2.2 :

1. La première implication est vraie. D'après la table de vérité du connecteur " \Rightarrow ", si P est toujours fausse dans $P \Rightarrow Q$ alors l'implication est vraie.

2. On peut écrire la contraposée et raisonner comme au 1..

Ou bien on se réfère à la table de vérité du connecteurs " \Rightarrow " : si Q est toujours vraie dans $P \Rightarrow Q$ alors l'implication est vraie.

Exercice A.2.3 : On doit chercher le seul sous-ensemble A de E pour lequel l'implication suivante est fausse

$$\forall x \in A, P(x) \Rightarrow \exists x \in A, P(x).$$

Cela signifie que nous devons chercher $A \subset E$ pour lequel la négation de cette implication est vraie :

$$(\forall x \in A, P(x)) \quad \text{et} \quad (\forall x \in A, \text{non } P(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in A, (P(x) \text{ et non } P(x))$$

Puisque la proposition $(P(x) \text{ et non } P(x))$ est absurde, on en déduit qu'il n'y a aucun élément $x \in E$ satisfaisant cette proposition. Cela se traduit par $A = \emptyset$.

Exercice A.2.14 :

2. A démontrer par l'absurde avec $p = 1$.

La phrase est équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \text{ est pair ou } n^2 - 1 \text{ est un multiple de } 8.$$

Écrire la négation et montrer que la proposition obtenue est fausse.

correction : $\exists n \in \mathbb{Z}, n$ est impair et $(n^2 - 1)$ n'est pas un multiple de 8.

Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. On calcule

$$n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4(k^2 + k) = 4k(k + 1).$$

Puisque le produit de deux entiers consécutifs est pair, on en déduit que $k(k + 1) = 2q$ avec $q \in \mathbb{Z}$.

Finalement $n^2 - 1 = 8q$ est bien un multiple de 8.

La négation est fausse donc la proposition initiale est donc vraie.

Exercice A.2.18 : Respecter le symbole "supérieur stricte".

2. Etudier l'hérédité. Cherchons $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

correction. $2^{n+1} = 2^n + 2^n$. Par hypothèse de récurrence, $2^n > n^2$ donc on a $2^{n+1} > 2n^2$. Pour conclure, on cherche p tel que $n \geq p \Rightarrow 2n^2 \geq (n+1)^2$. Cela revient à étudier le signe de $n^2 - 2n - 1$ qui est positif pour les entiers $n \geq p = 3$. En concaténant les résultats on aboutit à $2^{n+1} > (n+1)^2$.

On a donc démontré l'hérédité pour $n \geq p = 3$.

Cependant, $P(3)$ et $P(4)$ sont fausses d'où

Initialisation à $n = 5$. $2^5 = 32 > 5^2 = 25$ donc $P(5)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \llbracket 5, +\infty \rrbracket, 2^n > n^2$.

Exercice A.2.27 : Pour toute application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on pose

$$K_f = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad I_f = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}.$$

On note E l'ensemble des applications définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Il faut comprendre que :

Le symbole $\{\dots\}$ signifie l'ensemble de .

K_f est l'ensemble des solutions x dans \mathbb{R} de l'équation $f(x) = 0$.

I_f est l'ensemble des images par f ou encore $I_f = \text{Im} f = f(\mathbb{R})$.

1. Voir TP2.

2. Soient $f, g \in E$ telles que $f(0) = g(0) = 0$.

(a) Par hypothèse, $0 \in K_f$ et $0 \in I_g$ donc $0 \in K_f \cap I_g$. On vient de démontrer $K_f \cap I_g \neq \emptyset$.

(b) On doit montrer l'implication $x \in K_g \Rightarrow x \in K_{f \circ g}$.

Soit $x \in K_g$. Alors $g(x) = 0$. On calcule $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$. Cela signifie que $x \in K_{f \circ g}$. On vient de démontrer l'inclusion $K_g \subset K_{f \circ g}$.

(c) On doit montrer l'implication $K_f \cap I_g = \{0\} \Rightarrow K_g = K_{f \circ g}$.

hypothèse : $K_f \cap I_g = \{0\}$.

Cela signifie que le seul réel y appartenant à la fois à K_f et I_g est $y = 0$.

but : $K_g = K_{f \circ g}$.

D'après (b), on sait que $K_g \subset K_{f \circ g}$. On doit montrer l'inclusion réciproque $K_{f \circ g} \subset K_g$.

Plus précisément, sous l'hypothèse " $K_f \cap I_g = \{0\}$ ", on doit montrer l'implication $x \in K_{f \circ g} \Rightarrow x \in K_g$.

Soit $x \in K_{f \circ g}$. Alors $f \circ g(x) = f(g(x)) = 0$.

On pose $y = g(x)$. On a évidemment $y \in I_g$. De plus $f(y) = 0$ donc $y \in K_f$.

Enfin $y \in K_f \cap I_g$. D'après l'hypothèse, $y = 0$.

Or $y = g(x)$ donc $g(x) = 0$ et on en déduit que $x \in K_g$.

On vient de démontrer l'inclusion $K_{f \circ g} \subset K_g$. D'après (b), on conclut l'égalité $K_g = K_{f \circ g}$.

3. Soient $f, g \in E$.

(a) On doit montrer l'implication $y \in I_{f \circ g} \Rightarrow y \in I_f$.

Soit $y \in I_{f \circ g}$. Alors $\exists x \in \mathbb{R}, y = f \circ g(x) = f(g(x))$. On pose $x' = g(x)$. Alors $y = f(x')$ et $x' \in \mathbb{R}$. Donc $y \in I_f$. On vient de démontrer l'inclusion $I_{f \circ g} \subset I_f$.

(b) On doit montrer l'implication $I_g = \mathbb{R} \Rightarrow I_{f \circ g} = I_f$.

hypothèse : $I_g = \mathbb{R}$.

Cela signifie que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = g(x)$.

but : $I_{f \circ g} = I_f$.

D'après (a), on sait que $I_{f \circ g} \subset I_f$. On doit montrer l'inclusion réciproque $I_f \subset I_{f \circ g}$.

Plus précisément, sous l'hypothèse " $I_g = \mathbb{R}$ ", on doit montrer l'implication $z \in I_f \Rightarrow z \in I_{f \circ g}$.

Soit $z \in I_f$. Alors $\exists y \in \mathbb{R}, z = f(y)$.

Par hypothèse, $\exists x \in \mathbb{R}, y = g(x)$.

Par composition, on peut écrire $z = f(g(x)) = f \circ g(x)$. Donc $z \in I_{f \circ g}$.

On vient de démontrer $I_f \subset I_{f \circ g}$. D'après (a), on conclut l'égalité $I_{f \circ g} = I_f$.

Exercice A.2.30 : Dans cet exercice, il est important d'appliquer les indicatrices à un couple $(x, y) \in E \times F$ pour une meilleure compréhension des produits cartésiens.

1. En utilisant l'équivalence

$$(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } y \in B,$$

on peut en déduire que

$$\mathbf{1}_{A \times B}(x, y) = \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y).$$

2. Les hypothèses entraînent les simplifications suivantes

$$C \subset A \subset E \Rightarrow A \cap C = C \Rightarrow \forall x \in E, \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_C(x) = \mathbf{1}_C(x) \text{ et } \mathbf{1}_{A \setminus C}(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_C(x),$$

$$D \subset B \subset F \Rightarrow B \cap D = D \Rightarrow \forall y \in F, \mathbf{1}_B(y) \times \mathbf{1}_D(y) = \mathbf{1}_D(y) \text{ et } \mathbf{1}_{B \setminus D}(y) = \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_D(y).$$

Pour l'ensemble de gauche, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{(A \times B) \setminus (C \times D)}(x, y) &= \mathbf{1}_{(A \times B)}(x, y) - \mathbf{1}_{(A \times B)}(x, y) \times \mathbf{1}_{(C \times D)}(x, y) \\ &= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) \times \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y) \\ &= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y). \end{aligned}$$

Pour l'ensemble de droite, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{((A \setminus C) \times B) \cup (C \times (B \setminus D))}(x, y) &= \mathbf{1}_{((A \setminus C) \times B)}(x, y) + \mathbf{1}_{(C \times (B \setminus D))}(x, y) - \mathbf{1}_{((A \setminus C) \times B)}(x, y) \times \mathbf{1}_{(C \times (B \setminus D))}(x, y) \\ &= \mathbf{1}_{((A \setminus C) \times B)}(x, y) + \mathbf{1}_{(C \times (B \setminus D))}(x, y) - \underbrace{\mathbf{1}_{((A \setminus C) \times B)}(x, y) \times \mathbf{1}_{(C \times (B \setminus D))}(x, y)}_{=0} \\ &= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_B(y) + \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y) \\ &= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y). \end{aligned}$$

Les deux ensembles sont égaux.