

Exercice A.2.12 - Question 1 : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad u_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

Indications : $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

(i) Montrons que (v_n) est croissante :

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

(ii) Montrons que (u_n) est décroissante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= v_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \left(v_n + \frac{1}{nn!} \right) = (v_{n+1} - v_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n!} \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

(iii) Montrons que $(u_n - v_n)$ converge vers 0 :

$$u_n - v_n = \frac{1}{nn!} \Rightarrow 0 < u_n - v_n = \frac{1}{nn!} \leq \frac{1}{n} \quad \text{car } n! \geq 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et elles convergent vers la même limite.

Complément : la limite de ces deux suites est le nombre irrationnel $e \approx 2.718\dots$ dont vous verrez une justification au chapitre 6.

Exercice A.2.13 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose $0 < b < a$ (donc $(a - b) > 0$).
On considère les suites définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et les relations de récurrences

$$u_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a + b} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{bu_n + av_n}{a + b}.$$

- (i) On commence par étudier la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$:
Montrer que (w_n) est une suite géométrique, càd $\exists 0 < q < 1$, $w_{n+1} = qw_n$.
En déduire l'expression de w_n en fonction de n et w_0 et sa limite quand $n \rightarrow +\infty$.
Puis justifier que les termes de la suite (w_n) sont soit « tous positifs » soit « tous négatifs ».

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a + b} - \frac{bu_n + av_n}{a + b} = \frac{a - b}{a + b}(u_n - v_n).$$

La suite $(u_n - v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{a-b}{a+b}$ donc $u_n - v_n = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n (u_0 - v_0)$.
D'après les hypothèses sur a et b , on a

$$0 < b < a \Rightarrow 0 < a - b < a + b \Rightarrow 0 < \frac{a-b}{a+b} < 1 \Rightarrow u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Comme la raison est strictement positive, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $w_n = u_n - v_n$ est constant et égal au signe du premier terme $w_0 = u_0 - v_0$.

- (ii) Montrer que l'une des suites est croissante et l'autre décroissante : on peut seulement montrer que les quantités $(u_{n+1} - u_n)$ et $(v_{n+1} - v_n)$ sont de signe constant et contraire.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{au_n + bv_n}{a + b} - u_n = \frac{-bu_n + bv_n}{a + b} = -\frac{b}{a + b}(u_n - v_n).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ garde un signe constant et est égal au signe opposé de $u_0 - v_0$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{bu_n + av_n}{a + b} - v_n = \frac{bu_n - bv_n}{a + b} = \frac{b}{a + b}(u_n - v_n).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n$ garde un signe constant et est égal au signe de $u_0 - v_0$.

conclusion : L'une des suites est croissante, l'autre décroissante et $v_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ donc (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

- (iii) Pour déterminer leur limite commune ℓ on s'intéresse à la suite $s_n = u_n + v_n$.

Montrer que (s_n) est une suite constante.

En déduire la limite commune de (v_n) et (u_n) en fonction de u_0 et v_0 . On a

$$w_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a + b} + \frac{bu_n + av_n}{a + b} = \frac{(a + b)u_n + (b + a)v_n}{a + b} = u_n + v_n.$$

La suite (w_n) est constante donc sa limite est $u_0 + v_0$.

D'après les opérations sur les limites, en posant $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 2\ell = u_0 + v_0.$$

Donc $\ell = \frac{u_0 + v_0}{2}$.

Exercice A.2.17 Dans ces trois questions, on cherche un équivalent au terme général de chaque série sous la forme $\frac{\lambda}{n^\alpha}$ et on conclut.

- (i) Le terme général est équivalent à $\frac{(2n)^4}{(3n^2)^3} = \frac{16n^4}{27n^6} = \frac{16}{27n^2}$. La série est convergente.
- (ii) Ici, il faut observer que $0 < \cos^2 n \leq 1$ donc $u_n \geq \frac{1}{n}$. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ aussi.

À finir

Exercice A.2.9 du chapitre 2 : Dans cet exercice on utilise quelques outils du chapitre 3

1. On étudie l'ensemble $A := \{1 + \frac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Pour déterminer l'existence de minorants/majorants, de plus grand élément/plus petit élément, borne inf/borne sup, il faut essayer d'ordonner les termes de la suites.

La présence de $(-1)^n$ dans la définition de u_n nous incite à travailler avec les suites extraites : $u_{2k} = 1 + \frac{(-1)^{2k}}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ et $u_{2k+1} = 1 + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1}$. La suite (u_{2k}) est définie pour $k \geq 1$ et la suite (u_{2k+1}) est définie pour $k \geq 0$.

Comme la suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est décroissante, il en va de même des suites de terme général $\frac{1}{2k}$ et $\frac{1}{2k+1}$. La suite $(u_{2k})_{k \geq 1}$ est donc décroissante et la suite $(u_{2k+1})_{k \geq 0}$ est croissante car la multiplication par -1 change le sens de variation. On résume cela par ces enchaînements d'inégalités

$$\begin{aligned} \dots \leq u_{2k} \leq \dots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5 \\ u_1 = 0 \leq u_3 = \frac{2}{3} \leq \dots \leq u_{2k+1} \leq \dots \end{aligned}$$

Ce qui est intéressant est qu'on a

$$u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \geq 1 \quad \text{et} \quad u_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1} \leq 1$$

Donc on peut concaténer les inégalités successives comme suit

$$u_1 = 0 \leq u_3 = \frac{2}{3} \leq \dots \leq u_{2k+1} \leq \dots \leq 1 \leq \dots \leq u_{2k} \leq \dots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

On conclut que l'ensemble A admet un plus petit élément $\min A = u_1 = 0$ et un plus grand élément $\max A = u_2 = \frac{3}{2}$.

On sait aussi que lorsque $\min A$ et $\max A$ existent alors $\inf A = \min A$ et $\sup A = \max A$ existent aussi.

2. On étudie l'ensemble $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$.

On procède de la même façon. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = (-1) + \frac{1}{n}$.

La présence de $(-1)^n$ dans la définition de u_n nous incite à travailler avec les suites extraites : $u_{2k} = (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ et $u_{2k+1} = (-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1}$. La suite (u_{2k}) est définie pour $k \geq 1$ et la suite (u_{2k+1}) est définie pour $k \geq 0$.

La suite $(u_{2k})_{k \geq 1}$ est donc décroissante et la suite $(u_{2k+1})_{k \geq 0}$ est décroissante également. On résume cela par ces enchaînements d'inégalités

$$\begin{aligned} \dots \leq u_{2k} \leq \dots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5 \\ \dots \leq u_{2k+1} \leq \dots \leq u_3 = -\frac{2}{3} \leq u_1 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui est intéressant est qu'on a

$$u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \geq 1 \quad \text{et} \quad u_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \leq 0$$

Donc on peut concaténer les inégalités successives comme suit

$$\cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots \leq u_3 = -\frac{2}{3} \leq u_1 = 0 \leq 1 \leq \cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

On conclut que l'ensemble B admet un plus grand élément $\max B = u_2 = \frac{3}{2}$. On sait aussi que lorsque $\max B$ existe alors $\sup B = \max B$ existe aussi.

Pour la borne inf, c'est plus compliqué. On commence par justifier qu'elle existe :

$$n > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} > 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \geq (-1)^n \geq -1.$$

L'ensemble B est minoré par -1 c'est une partie non vide de \mathbb{R} (car $u_1 = 0 \in B$). d'après l'axiome de la borne inférieure $\inf B$ existe. Il faut avoir l'intuition que $\inf B = -1$ en étudiant les limites des suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) .

Montrons que $\inf B = -1$: pour ce faire il faut démontrer les deux caractérisations de la borne inférieure.

$$\begin{cases} 1) \forall x \in B, -1 \leq x \\ 2) \forall t > -1, \exists x \in B, x < t. \end{cases}$$

La première caractérisation 1) est déjà justifiée plus haut. Il reste à prouver la seconde.

démonstration : Soit $t > -1$. On cherche $x = u_n$ tel que $x < t$. Il suffit de résoudre cette inégalité d'inconnue n . Comme on sait que ce sont les termes d'indices impairs qui sont proches de -1 , on peut poser $n = 2k + 1$.

$$u_{2k+1} < t \quad \Leftrightarrow \quad -1 + \frac{1}{2k+1} < t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{t+1} < 2k+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} - 1 \right) < k$$

On pose $k = E\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - 1\right)\right) + 1$. On a bien $u_{2k+1} \in B$ et $-1 \leq u_{2k+1} < t$. La seconde caractérisation est bien démontrée.

NB : Notez que $t > -1 \Rightarrow t+1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{t+1} - 1 > -1 \Rightarrow k = E\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - 1\right)\right) + 1 \geq 0$. L'indice proposé est bien dans \mathbb{N} .

Exercice A.2.7 - Question 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$. Nous allons étudier les suites récurrentes définies par le choix arbitraire de $u_0 \in [0, +\infty[$ et de terme général défini par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Comme indiqué en cours, commencez par rechercher les limites possibles d'une telle suite en résolvant l'équation

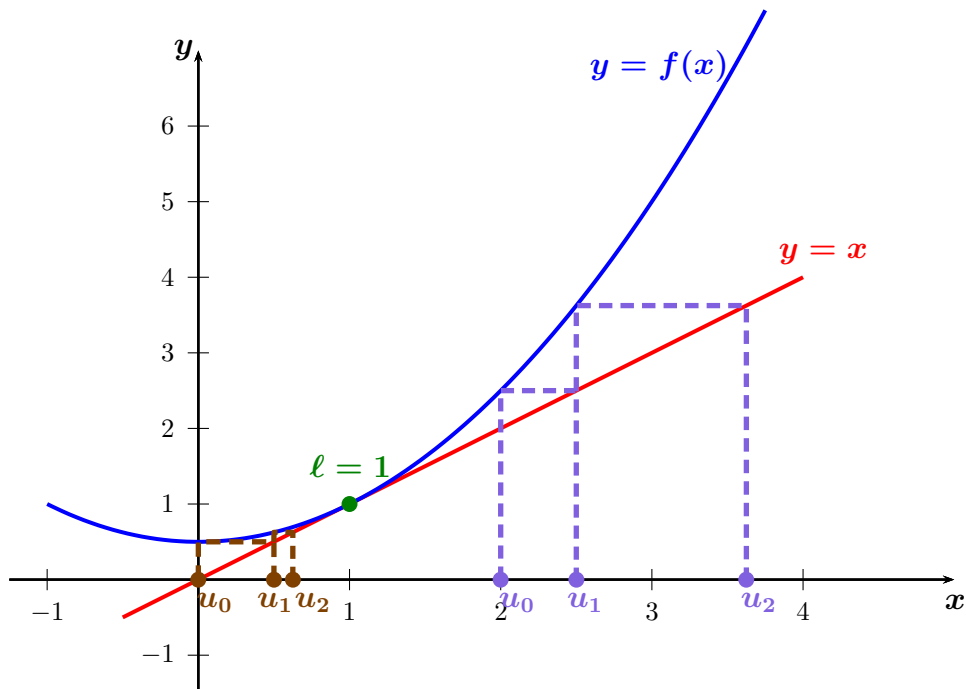
$$f(\ell) = \ell.$$

On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{2} = x \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}.$$

La fonction admet donc un seul point fixe. On sait donc que **si la suite (u_n) converge alors sa seule limite possible est $\ell = 1$.**

Pour la représentation graphique, on construit les premiers termes de plusieurs suites en choisissant u_0 de part et d'autres de la valeur $\ell = 1$. Sur le schéma ci-dessous, on a choisi $u_0 = 0$ puis $u_0 = 2$.



Ceci fait, conjecturons tous les comportements possibles dans l'hypothèse où $u_0 \geq 0$:

- (i) Si $u_0 \in [0, 1[$, alors la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.
- (ii) Si $u_0 = 1$ alors la suite u_n est constante.
- (iii) Si $u_0 > 1$, alors la suite (u_n) est croissante et n'est pas majorée. Elle diverge vers $+\infty$.

(b) Démonstrations des conjectures :

(i) **Hypothèse** : $u_0 \in [0, 1[$.

• On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 1$

Initialisation à $n = 0$: il s'agit de l'hypothèse sur u_0 .

Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $0 \leq u_n < 1$. On encadre pas à pas $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$:

$$0 \leq u_n < 1 \Rightarrow 0 \leq u_n^2 < 1 \Rightarrow 2 \leq u_n^2 + 1 < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{u_n^2 + 1}{2} < 1 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} < 1.$$

Conclusion : L'initialisation et l'hérédité sont satisfaites donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 1$.

• On montre que la suite (u_n) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0.$$

• La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. On conclut donc que (u_n) converge. Comme sa limite ℓ doit être un point fixe de f , on en déduit que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell = 1$.

(ii) **Hypothèse** : $u_0 = 1$.

• On montre par récurrence sur $n \geq 0$ que la suite (u_n) est constante.

Initialisation à $n = 0$: il s'agit de l'hypothèse sur u_0 .

Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $u_n = 1$. On calcule alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(1) = 1$.

Conclusion : L'initialisation et l'hérédité sont satisfaites donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$.

• Toute suite constante converge. Sa limite est $\ell = u_0 = 1$.

(iii) **Hypothèse** : $u_0 \in]1, +\infty[$.

• On sait que la suite (u_n) est croissante. En effet, l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ effectué plus haut reste valable.

• On montre par l'absurde que la suite diverge. (Pas facile à trouver soi-même mais la technique doit être mémorisée pour le final).

démonstration : Supposons que (u_n) converge. On sait alors que la suite converge vers $\ell = 1$ car c'est la seule limite possible. D'après le cours **proposition 3.1.4**, on sait que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell = 1}$.

Or, par hypothèse on a $u_0 > 1$ (supérieur stricte). Ceci est contradictoire avec la phrase encadrée pour $n = 0$.

La phrase " $1 < u_0 \leq 1$ " est absurde.

La négation de " (u_n) converge" mène à une absurdité donc la proposition " (u_n) diverge" est vraie.

• On montre par l'absurde que la suite tend vers $+\infty$. (Pas facile à trouver soi-même mais la technique doit être mémorisée pour le final).

démonstration : On suppose que la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$. On prend la négation de

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow u_n > A). \quad (\text{definition 3.1.2})$$

Cela donne

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > N \text{ et } u_n \leq A.$$

Comme la suite est croissante, on a $n > N \Rightarrow u_N \leq u_n$ donc la phrase devient

$$\boxed{\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, u_N \leq A.}$$

On peut alors en déduire que (u_n) est majorée.

Or, si (u_n) est majorée et croissante, le cours affirme que (u_n) converge. Ce qui est absurde car (u_n) diverge.

La négation de " (u_n) tend vers $+\infty$ " mène à une absurdité donc la proposition " (u_n) tend vers $+\infty$ " est vraie.

Exercice A.2.16 Convergence absolue

Pour mieux comprendre, considérons la suite de premiers termes :

$$u_0 = -1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = -5, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = -\frac{7}{2}, \quad \dots$$

La définition des termes généraux v_n et w_n donne :

$$\begin{aligned} v_0 = 0, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = \frac{1}{2}, \quad v_3 = 0, \quad v_4 = 3, \quad v_5 = 0, \quad \dots \\ w_0 = -1, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = -5, \quad w_4 = 0, \quad w_5 = -\frac{7}{2}, \quad \dots \end{aligned}$$

On remarque alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$, $w_n \leq 0$ et $u_n = v_n + w_n$.

À finir