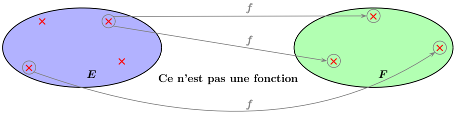
Chapitre II - Applications et nombres réels

I Applications $\quad f : E \to F$

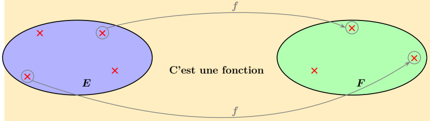
$\boxed{A}$ Définitions.

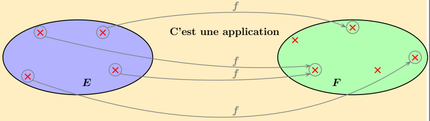


Definition

• Une **fonction** d'un ensemble de départ E vers un ensemble d'arrivée F, associe à tout élément x de E **au plus un** élément y de F.

• Une **application** d'un ensemble de départ E vers un ensemble d'arrivée F, associe **à tout** élément x de E **un et un seul** élément y de F.





Notation :

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto y = f(x) \end{array}$$

Vocabulaire :

- Le réel $y = f(x)$ est appelé **image** de x par f.
- Le réel x tel que $y = f(x)$ est appelé **antécédent** de y par f.
- L'ensemble $\{(x, y) \in E \times F \,;\; y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f.

Caractérisation d'une application : f est une application de E dans F $\Leftrightarrow$ $\boxed{\forall\, x \in E,\ \exists!\, y \in F,\ y = f(x)}$.

Les applications numériques usuelles. • Les fonctions polynômiales, la valeur absolue, sinus, cosinus, exponentielle sont des applications de $E = \mathbb{R}$ dans $F = \mathbb{R}$.

• On fera attention aux cas particuliers suivants :

$$\begin{array}{cccc} E = \mathbb{R}\backslash\{0\} & \rightarrow & F = \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = \frac{1}{x} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} E = [0, +\infty[& \rightarrow & F = \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = \sqrt{x} \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} E =]0, +\infty[& \rightarrow & F = \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = \ln\, x \end{array}$$

• *Lire la définition de* ***la fonction tangente*** *dans le complément de cours disponible sur Moodle.*

Definition

Soit f une fonction de E dans F. Le **domaine de définition de f** est l'ensemble des antécédents des éléments de F par f. On note $D_f := \{x \in E\,;\ \exists\, y \in F,\ y = f(x)\}$.

Remarque : Une application $f : E \rightarrow F$ est alors une fonction vérifiant $D_f = E$.

Definition

Soit f une application de E dans F. L'**image de f** est l'ensemble des images des éléments de E par f. On note $\mathrm{Im} f = \{y \in F\,;\ \exists x \in E,\ y = f(x)\} = f(E)$.

Exemples. préciser les images des applications usuelles.

⚠ En général, on a $\mathrm{Im} f \subsetneq F$.

$\boxed{B}$ Propriétés.

Definition

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

• L'application f est dite **injective** si « pour $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution dans E ». Autrement dit, $\boxed{\forall (x, x') \in E^2,\ \left(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\right)}$.

• L'application f est dite **surjective** si « pour $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution dans E ». Autrement dit, $\boxed{\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)}$.

• L'application f est dite **bijective** si « pour $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution dans E ». Autrement dit, $\boxed{\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)}$.

Proposition

f est bijective $\Leftrightarrow$ *f est injective et surjective.*

Exemple : Pour tout sous ensemble $E \subset \mathbb{R}$, id_E est bijective.

Exercice 1 : Déterminer E et F de sorte que $\begin{array}{rccl} f : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & y = 2x^2 - 3x + 1 \end{array}$ soit bijective.

Correction. *en cours*

Definition

Soit E, F et G des ensembles. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
La **composée de f par g**, notée $g \circ f$, est l'application définie de E dans G par $\forall\, x \in E,\ \ g \circ f(x) = g(f(x))$.

Diagramme :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

La composition n'est pas commutative : $g \circ f \neq f \circ g$ en général

Exemple. Soit $\begin{array}{rccc} f: & E = \mathbb{R} & \to & F = [0, +\infty[\\ & x & \mapsto & y = x^2 \end{array}$ $\quad \begin{array}{rccc} g: & F = [0, +\infty[& \to & E = \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y = \sqrt{x} \end{array}$

- La composée $g \circ f$ vérifie ...
- La composée $f \circ g$ vérifie ...

Exercice 2 :
Démontrer l'implication $\boxed{f \text{ et } g \text{ injectives} \quad \Rightarrow \quad g \circ f \text{ injective}}$.

Correction. *en cours*

Exercice 3 : (a) A-t-on $\quad g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ?
(b) A-t-on $\quad g \circ f$ injective $\Rightarrow g$ injective ?

Correction. *en cours*