III L'ensemble des réels

$\boxed{A}$ La relation d'ordre $\leqslant$.

Propriété(s)

On dit que $\mathbb{R}$ *est un ensemble* **totalement ordonné***, ce qui signifie :* $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b \text{ ou } b \leqslant a.}$

On peut alors définir le **max** *et le* **min** *entre deux réels a et b :*

$$\mathbf{max}(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}) = \begin{cases} a & \text{si } b \leqslant a \\ b & \text{si } a \leqslant b \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{min}(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}) = \begin{cases} b & \text{si } b \leqslant a \\ a & \text{si } a \leqslant b \end{cases}$$

Propriété(s)

1. *(Réflexivité)* $\forall\, a \in \mathbb{R},\ a \leqslant a.$
2. *(Transitivité)* $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \Big(a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c\Big) \Rightarrow\ a \leqslant c.$
3. *(Antisymétrie)* $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \Big(a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a\Big) \Leftrightarrow\ a = b.$

Pour tout ensemble contenant un nombre fini de réels, on définit le* max *et le* min *par récurrence « finie » :

Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ et $\boxed{A = \{x_1\,, \ldots\,, x_p\}}$ un ensemble à p éléments de $\mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\mathbf{max}\ \boldsymbol{A} = \max\big(\max\{x_1, \ldots, x_{p-1}\}\,; x_p\big) \quad \text{et} \quad \mathbf{min}\ \boldsymbol{A} = \min\big(\min\{x_1, \ldots, x_{p-1}\}\,; x_p\big).$$

$\boxed{B}$ Propriétés des parties non vides de $\mathbb{R}$.

Definition

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. A est **majoré** $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant M.$
2. A est **minoré** $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ m \leqslant x.$
3. A est **borné** $\Leftrightarrow$ A est minoré et majoré.

Exemples : $A_1 = \{\cos(\frac{\pi}{n});\ n \in \mathbb{N}^*\}$, $A_2 = \operatorname{Im} f$ avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2} \in \mathbb{R}$ et $A_3 = \{(-2)^n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$.
Étude en cours.

Proposition (Autre caractérisation d'un ensemble borné)

$$A \text{ est borné} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, C \geqslant 0,\ \forall x \in A,\ |x| \leqslant C.$$

Preuve. *en cours*

Definition (Max et Min d'un ensemble quelconque)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. A admet un **plus petit élément** $\Leftrightarrow \exists\, m \in A,\ \forall x \in A,\ m \leqslant x.$ *(on le notera* $\min A$.*)*
2. A admet un **plus grand élément** $\Leftrightarrow \exists\, M \in A,\ \forall x \in A,\ x \leqslant M.$ *(on le notera* $\max A$.*)*

Exemples : étudier A_1, A_2 et A_3.

Definition

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Le plus petit majorant de A est appelé **borne supérieure de A** et noté $\mathbf{\sup A}$.

Caractérisation de la borne supérieure de A :

1. $\forall\, x \in A,\ x \leqslant \sup A$ *($\sup A$ est un majorant)*
2. $\forall\, t < \sup A,\ \exists x \in A,\ t < x$ *($\sup A$ est le plus petit des majorants*

⚠ $\sup A$ n'appartient pas nécessairement à A.
Contre-exemple : à choisir parmi A_1, A_2 et A_3.

Axiome (de la borne sup)

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exercice. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Démontrer que si A admet un plus grand élément $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\sup A$ existe et $\sup A = \alpha$.

Correction au prochain TD.

$\vdots$

⚠ ne pas confondre $\sup A$ et $\max A$!

Definition

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.
Le plus grand minorant de A est appelé **borne inférieure de A** et noté $\mathbf{inf}\, \boldsymbol{A}$.

Caractérisation de la borne inférieure de A :

(1) $\forall x \in A,\ \inf A \leqslant x$ *($\inf A$ est un minorant)*

(2) $\forall t > \inf A,\ \exists x \in A,\ x < t$ *($\inf A$ est le plus grand des minorants)*

⚠ $\inf A$ n'appartient pas nécessairement à A.
Contre-exemple : à choisir parmi A_1, A_2 et A_3.

Axiome (de la borne inf)

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Exercice. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Démontrer que si A admet un plus petit élément $\beta \in \mathbb{R}$ alors $\inf A$ existe et $\inf A = \beta$.

Correction au prochain TD.

$\vdots$

⚠ ne pas confondre $\inf A$ et $\min A$!

$\boxed{C}$ Introduction de la fonction partie entière.

Propriété(s) (d'Archimède - utilisée au chapitre 3)

On admettra le résultat suivant : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x < n}$. *(se démontre avec la borne* sup*)*

Corollary

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists! k \in \mathbb{Z}, \quad k \leqslant x < k + 1.$$

Definition (Partie entière- utilisée au chapitre 3)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x est appelé **partie entière de x**, notée $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$.

On a $\boxed{E(x) \leqslant x < E(x) + 1}$.

Représentation graphique.