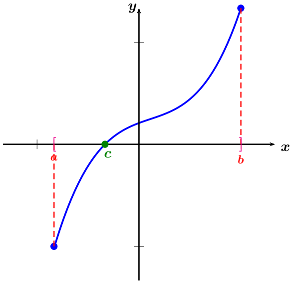
IV Quelques théorèmes fondamentaux

Lemma

Soit I un intervalle et f une application continue sur I. Soient $a, b \in I$ tel que $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$. Alors $\exists\, \boldsymbol{c} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\,,\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \mathbf{0}$.



preuve : Considérons le cas où $\boxed{f(a) < 0 < f(b)}$.

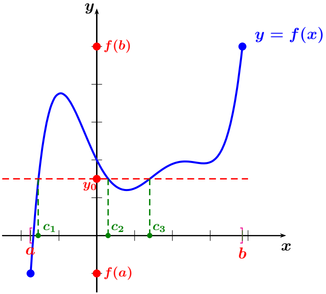
On pose $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\ ;\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \mathbf{0}\}$. Alors G est une partie bornée de $\mathbb{R}$.

De plus, $f(a) < 0 \Rightarrow a \in G \Rightarrow G \neq \varnothing$.

On en déduit que $c = \sup G$ existe. Il reste à montrer par l'absurde que $f(c) = 0$.

Theorem (théorème des valeurs intermédiaires)

Soit I un intervalle et f une application continue sur I. Soient $a, b \in I$ tel que $a < b$. Alors pour tout y_0 strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists\, \boldsymbol{c} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[\,,\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{y_0}$.



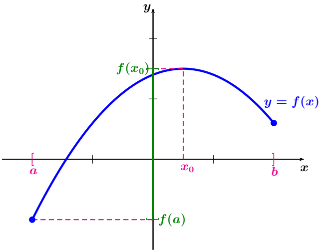
preuve : Considérons le cas où $\boxed{f(a) < f(b)}$.

Theorem (Image d'un intervalle)

Soit I un intervalle et f une application <u>*continue*</u> *sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Rappel : (caractérisation d'un intervalle)

$$J \text{ est un intervalle} \Leftrightarrow \forall\,(x_1, x_2) \in J^2,\ (x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow [x_1,\ x_2] \subset J).$$



preuve : on pose $J = f(I)$. Soit $(y_1, y_2) \in J^2$ tels que $y_1 \leqslant y_2$.
Montrons que $[y_1, y_2] \subset J$.

Theorem (Image d'un intervalle fermé)

L'image d'un intervalle fermé borné $I = [a, b]$ par une application continue sur I est un intervalle fermé borné de la forme $[f(x_0), f(x_1)]$ où $x_0, x_1 \in [a, b]$.

⚠ La continuité est très importante.

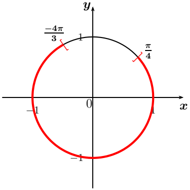
contre-exemple : Prenons la fonction partie entière, $E([-1, 1]) = \dots$

⚠ Être borné est très important.

contre-exemple : Prenons la fonction inverse, $f(x) = \frac{1}{x}$ et $I = [1, +\infty[\ \dots$

Theorem (Image d'un intervalle ouvert)

Soit Ω un intervalle ouvert. Si f une application continue et strictement monotone sur Ω, alors $f(\Omega)$ est un intervalle ouvert.



⚠ La stricte monotonie est très importante.

contre-exemple : Prenons la fonction cosinus et $\Omega = \left]-\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right[$.

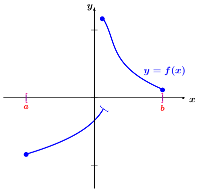
$$f(\Omega) = \dots$$

Exercice : Soit f une application strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que f est injective

Correction : Plaçons nous dans le cas où f est strictement croissante.

⚠ La réciproque est fausse.

Ci-contre un contre-exemple : f est injective mais n'est pas monotone.



Corollary (monotonie et bijection)

Soit I un intervalle. Toute application $f : I \to f(I)$ strictement monotone est bijective.
De plus, si f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Exercice de cours de la section A.1

Pour une meilleure compréhension du cours, vous pouvez faire les exercices suivants :

- Chapitre 4 : A.1.17
- Chapitre 4 : A.1.20
- Chapitre 4 : A.1.23
- Chapitre 5 : A.2.7 (pour se préparer au calcul de fonctions dérivées)

Ces exercices sont à faire en dehors des TDs et avant les 3h de TDs qui suivent ce cours.