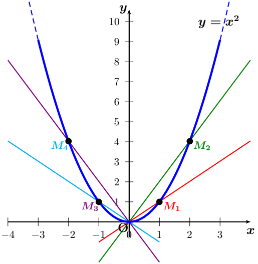
Chapitre 5 - Dérivabilité

Préliminaires

Definition (droite sécante)

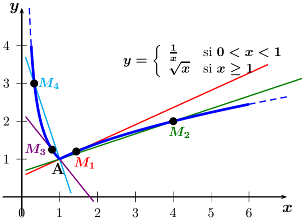
Une **sécante** issue d'un point A d'une courbe $\mathscr{C}$ est une droite passant par A et un autre point $M \in \mathscr{C}$.



Exemple 1. $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$ et $A = O(0,0) \in \mathscr{C}_f$.
Pour tout $x \neq 0$, on choisit $M(x, x^2) \in \mathscr{C}_f$.

- Les sécantes (AM) issues de A admettent une et une seule position limite lorsque M se rapproche de A. Cette position limite est appelée *tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A* et correspond ici à l'axe des abscisses.

- On dit alors que *f est dérivable au point $x_A = 0$* et le nombre dérivé est le *coefficient directeur de cette tangente*, $f'(x_A) = 0$.



Exemple 2. $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$ et $A = (1,1) \in \mathscr{C}_g$.

- Pour tout $x \neq 1$, on choisit $M(x, g(x)) \in \mathscr{C}_g$.

Les sécantes (AM) issues de A admettent deux positions limites lorsque M se rapproche de A. Il s'agit des droites d'équation $y = 2 - x$ et $y = \frac{1+x}{2}$.

- La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point A n'existe pas, On dit que la fonction *g n'est pas dérivable en $x_A = 1$*.

I Définition et propriétés

On définit la dérivabilité géométriquement.

Notations : f est une fonction définie sur un intervalle ouvert Ω, $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative, $A(a, f(a))$ est un point de $\mathscr{C}_f$, $M(x, f(x))$ est un autre point de $\mathscr{C}_f$ avec $(a, x) \in \Omega^2$ et $x \neq a$.

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ existence et unicité de la position limite des sécantes (AM) issues de A quand M tend vers A.

$\Leftrightarrow$ existence et unicité de la limite des coefficients directeurs des sécantes (AM), quand M tend vers A.

Definition (dérivabilité en un point)

f est **dérivable en a** si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe.
Lorsqu'elle existe, cette limite, notée $f'(a)$, est appelée nombre dérivé de f en a.

Calcul pratique : on pose $x = a + h$ ($\Leftrightarrow x - a = h$) avec $h \neq 0$ et on calcule $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$.

Le quotient $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé **taux d'accroissement** (ou de variation) de f en a.

Theorem (condition nécessaire et suffisante)

f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ *il existe $d \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 tels que*

$$\forall x = a + h \in \Omega, \quad f(a+h) = f(a) + dh + |h|\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

preuve : $(\Leftarrow)$

$\vdots$

$(\Rightarrow)$

$\vdots$

Exercice : Montrons que la fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$.
correction. *en cours*

$\vdots$

Corollary

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Rightarrow \quad f \text{ est continue en } a$$

preuve 1 : On utilise la CNS de dérivabilité : $f(a+h) = f(a) + dh + |h|\varepsilon(h)$ et $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

$$\vdots$$

preuve 2 : On utilise les opérations sur les limites en écrivant : $f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a)$.

$$\vdots$$

⚠ La réciproque est fausse.

contre-exemple : la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Résultat admis : Les fonctions usuelles *polynômes, sinus, cosinus, exponentielle, logarithme népérien* sont continues et dérivables sur leur domaine de définition. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

Quelques formules : Soient u et v deux fonctions dérivables. ALors,

$$\boxed{\begin{array}{lcl} (uv)' = u'v + uv' & & (\mathbf{1}) \\ \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} & & (\mathbf{2}) \end{array}}$$

preuve de (1) : On doit montrer que le taux d'ac. $\dfrac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$ admet une limite quand $h \to 0$.

$$\vdots$$

Theorem (dérivée de fonctions composées)

Soient Ω et Ω' deux intervalles ouverts. On suppose que $f : \Omega \to \operatorname{Im} f \subset \Omega'$ est dérivable en a et $g : \Omega' \to \mathbb{R}$ est dérivable en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a) \quad (\mathbf{3})}$$

preuve de (3) : on doit montrer que le taux d'ac. $\dfrac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h}$ admet une limite quand $h \to 0$.

$$\vdots$$

Definition (dérivée d'ordre supérieur)

On définit la fonction **dérivée n-ième de f**, notée $f^{(n)}$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- pour $n = 0$, on a $f^{(0)} = f$
- pour $n \geqslant 1$, si $f^{(n-1)}$ est dérivable alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Notations :

1. On note $\mathscr{C}^0(\Omega)$, l'ensemble des fonctions f définies et continues en tout point $a \in \Omega$.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$. Si f' existe et est continue sur Ω, on dit que f est continûment dérivable sur Ω. On note $\mathscr{C}^1(\Omega)$, l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$ continûment dérivable sur Ω.
3. Plus généralement, pour $n \geqslant 1$, on définit l'ensemble $\mathscr{C}^n(\Omega)$ de la façon suivante :
$$f \in \mathscr{C}^n(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \Omega,\ f^{(n)}(x) \text{ existe et } \quad f^{(n)} \text{ est continue sur } \Omega$$
4. Si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}$ est dérivable alors on dit que $f \in \mathscr{C}^\infty$.

Résultat admis : Les fonctions usuelles *polynômes, sinus, cosinus, exponentielle, logarithme népérien* sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Exemples : avec $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), exp, ln, cos et sin.

Quelques formules : Soient f et g deux fonctions n fois dérivables en a. Alors

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(\lambda f)^{(n)}(a) = \lambda f^{(n)}(a)$
2. la somme est n fois dérivable en a : $(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$
3. le produit est n fois dérivable en a :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(0)}(a) &= (fg)(a) = f(a)g(a) \\
(fg)^{(1)}(a) &= (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) = 1 \times f^{(1)}(a)g^{(0)}(a) + 1 \times f^{(0)}(a)g^{(1)}(a) \\
(fg)^{(2)}(a) &= \left((fg)^{(1)}\right)'(a) = \left(f''(a)g(a) + f'(a)g'(a)\right) + \left(f'(a)g'(a) + f(a)g''(a)\right) \\
&= 1 \times f^{(2)}(a)g^{(0)}(a) + 2 \times f^{(1)}(a)g^{(1)}(a) + 1 \times f^{(0)}(a)g^{(2)}(a)
\end{aligned}$$

Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a)$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\times(n-1)\times\cdot\times(n-k+1)}{1\times2\times\cdots\times k}$ s'obtient récursivement à l'aide du triangle de Pascal (voir le complément « Binôme de Newton » sur Moodle).