Chapitre 1. Corrigés des exercices.

Exercice A.2.27 : Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pose

$$K_f = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad I_f = \{y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}.$$

On note E l'ensemble des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Il faut comprendre que :
Le symbole $\{\cdots\}$ signifie *l'ensemble de* .
K_f est l'ensemble des solutions x dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.
I_f est l'ensemble des images par f ou encore $I_f = \mathrm{Im} f = f(\mathbb{R})$.

1. • La proposition "$\forall\, f \in E, K_f \neq \varnothing$" est fausse car sa négation "$\exists\, f \in E, K_f = \varnothing$" est vraie. Un exemple est la fonction constante suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 \end{array}$$

ou bien $x \mapsto e^x$ ou bien $x \mapsto x^2 + 1$, ...

• La proposition "$\forall\, f \in E, I_f \neq \varnothing$" est vraie par définition d'une application. En effet, si $f \in E$ alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists!\, y \in \mathbb{R},\ y = f(x) \ \Rightarrow\ \exists\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R},\ y = f(x) \ \Rightarrow\ \exists\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x) \ \Rightarrow\ I_f \neq \varnothing.$$

ou plus simplement

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists!\, y \in \mathbb{R},\ y = f(x) \ \Rightarrow\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \text{ existe et } f(x) \in I_f \ \Rightarrow\ f(0) \in I_f \ \Rightarrow\ I_f \neq \varnothing.$$

Exercice A.2.28.

1. $(A\cap C)\backslash(B\cap C) = (A\cap C)\cap \complement_E(B\cap C) = (A\cap C)\cap\left(\complement_E B \cup \complement_E C\right) = \left(A\cap C\cap \complement_E B\right)\cup\underbrace{\left(A\cap C\cap \complement_E C\right)}_{=\varnothing} = A\cap C\cap \complement_E B.$

$(A\backslash B)\cap C = A\cap \complement_E B\cap C.$

$(A\cap C)\backslash B = A\cap C\cap \complement_E B.$

$(C\backslash B)\cap A = C\cap \complement_E B\cap A.$
Par commutativité de $\cap$, tous ces ensembles sont égaux.

2. Ne pas utiliser la question 1. Appliquer les formules de transformations de $\cap$, $\cup$ et $\backslash$ en produit, somme et différence :

$$\mathbf{1}_{(A\cap C)\backslash(B\cap C)} = \mathbf{1}_{A\cap C} - \mathbf{1}_{A\cap C}\times\mathbf{1}_{B\cap C} = \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_C\times\mathbf{1}_B\times\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_C\times\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_C\times(1-\mathbf{1}_B).$$

$$\mathbf{1}_{(A\backslash B)\cap C} = \mathbf{1}_{A\backslash B}\times\mathbf{1}_C = (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_B)\times\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_C\times(1-\mathbf{1}_B)$$

$$\mathbf{1}_{(A\cap C)\backslash B} = \mathbf{1}_{A\cap C} - \mathbf{1}_{A\cap C}\times\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_C\times\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_C\times(1-\mathbf{1}_B)$$

$$\mathbf{1}_{(C\backslash B)\cap A} = \mathbf{1}_{C\backslash B}\times\mathbf{1}_A = (\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_C\times\mathbf{1}_B)\times\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\times\mathbf{1}_C\times(1-\mathbf{1}_B).$$

Les quatres indicatrices sont égales.

Exercice A.2.29.

1. Faire une figure pour distinguer l'ensemble $A\Delta B$. Puis utiliser l'exercice précédent.

$$\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B \quad \text{et } \mathbf{1}_{B\setminus B} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{1}_{A\Delta B} = (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) + (\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) - \underbrace{(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) \times (\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B)}_{=0} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \times \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B.$$

2. On a

$$(A\Delta B) \cap C = \Big((A\setminus B) \cup (B\setminus A)\Big) \cap C = \Big((A\setminus B) \cap C\Big) \cup \Big((B\setminus A) \cap C\Big) = \Big(A \cap \complement_E B \cap C\Big) \cup \Big(\complement_E A \cap B \cap C\Big)$$

et

$$\begin{aligned}
(A\cap C)\Delta(B\cap C) &= \Big((A\cap C)\setminus(B\cap C)\Big) \cup \Big((B\cap C)\setminus(A\cap C)\Big) \\
&= \Big((A\cap C) \cap \complement_E(B\cap C)\Big) \cup \Big((B\cap C) \cap \complement_E(A\cap C)\Big) \\
&= \Big((A\cap C) \cap \Big(\complement_E B \cup \complement_E C\Big)\Big) \cup \Big((B\cap C) \cap \Big(\complement_E A \cup \complement_E C\Big)\Big) \\
&= \Big((A\cap C \cap \complement_E B) \cup \underbrace{(A\cap C \cap \complement_E C)}_{=\varnothing}\Big) \cup \Big((B\cap C \cap \complement_E A) \cup \underbrace{(B\cap C \cap \complement_E C)}_{=\varnothing}\Big) \\
&= (A\cap C \cap \complement_E B) \cup (B \cap C \cap \complement_E A).
\end{aligned}$$

Par associativité de l'intersection, les deux ensembles sont égaux.
3. Calculer les indicatrices des deux ensembles : utiliser la question **1**.

$$\mathbf{1}_{(A\Delta B)\cap C} = \Big(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \times \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B\Big) \times \mathbf{1}_C$$

$$(A\cap C)\Delta(B\cap C) = \mathbf{1}_{A\cap C} + \mathbf{1}_{B\cap C} - 2 \times \mathbf{1}_{A\cap C} \times \mathbf{1}_{B\cap C} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_C - 2 \times \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_C$$