Chapitre 5. Exercice A.2.5

On utilise la définition d'une fonction f dérivable en un point $a \in \mathscr{D}_f$: la limite du taux d'accroissements existe.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)\ .$$

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = \exp'(0) = 1$ car exp est dérivable en 0 et $\exp'(x) = e^x$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = 1$ car ln est dérivable en 1 et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = \ln'(1) = 1.$

4. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x - \frac{1}{2}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin(\frac{\pi}{3})}{\cos x - \cos(\frac{\pi}{3})} = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin(\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\cos x - \cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sin'(\frac{\pi}{3})}{\cos'(\frac{\pi}{3})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{-\sin(\frac{\pi}{3})} =$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ car sin et cos sont dérivables en $\frac{\pi}{3}$ et $\cos'(\frac{\pi}{3}) \neq 0$.

5. On pose $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$.

$\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{3})}{-2(\cos x - \cos(\frac{\pi}{3}))} = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} -\frac{1}{2}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} \frac{x-\frac{\pi}{3}}{\cos x - \cos(\frac{\pi}{3})} = -\frac{1}{2}\frac{f'(\frac{\pi}{3})}{\cos'(\frac{\pi}{3})} =$ $\displaystyle -\frac{1}{2}\frac{\cos(0)}{-\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ car f et cos sont dérivables en $\frac{\pi}{3}$ et $f'(x) = \cos(x-\frac{\pi}{3})$.

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-e^0)-(e^{-x}-e^0)}{\sin x - \sin 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{\sin x - \sin 0} - \frac{e^{-x}-e^0}{\sin x - \sin 0} = \frac{e^0}{\cos(0)} - \frac{-e^0}{\cos(0)} = 2$ car exp et sin sont dérivables en 0 et $\sin'(0) \neq 0$.

Exercice hors poly. Préciser le domaine de dérivabilité des fonctions f suivantes et calculer leur dérivées $f'(x)$.

① $f(x) = \dfrac{-2x^2+4x}{x^2+x+1}$ ③ $f(x) = (1-x)^3\sqrt{1+x}$ ⑤ $f(x) = e^{\sqrt{1+x^2}}$

② $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}}{x+1}$ ④ $f(x) = \dfrac{2}{(3x+5)^3}$ ⑥ $f(x) = \ln\sqrt{1-x^2}$

Puis, remplir le formulaire ci-dessous :

$f(x)$	$e^{u(x)}$	$\sqrt{u(x)}$	$\ln(u(x))$	$\ln\|u(x)\|$	$(u(x))^n$	$\dfrac{1}{(u(x))^n}$
$f'(x)$						

$f(x)$	$e^{u(x)}$	$\sqrt{u(x)}$	$\ln(u(x))$	$\ln\|u(x)\|$	$(u(x))^n$	$\dfrac{1}{(u(x))^n}$
$f'(x)$	$u'(x)\times e^{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$n\times u'(x)\times(u(x))^{n-1}$	$-n\times\dfrac{u'(x)}{(u(x))^{n+1}}$

① f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\forall\, x\in\mathbb{R},\ x^2+x+1>0$ et

$$f'(x) = \frac{-6x^2-4x+4}{(x^2+x+1)^2}$$

② f est définie et dérivable sur $]-\frac{3}{2},+\infty[\backslash\{-1\}$ et

$$f'(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2\sqrt{2x+3}}.$$

③ f est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$f'(x) = -3(1-x)^2\sqrt{1+x}\ +\ (1-x)^3\times\frac{1}{2\sqrt{1+x}} = -\frac{(1-x)^2}{2\sqrt{1+x}}(5+7x).$$

④ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{5}{3}\}$ et

$$f'(x) = -\frac{18}{(3x+5)^4}$$

⑤ f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\sqrt{1+x^2}}$$

⑥ f est définie et dérivable sur $]-1,1[$ et

$$f'(x) = \frac{x}{x^2-1}$$