Chapitre 5. Exercice A.2.24

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

1. • Tout d'abord on détermine le domaine de définition de f. Il s'agit de résoudre $x^2+x+1>0$. Le discriminant est $\Delta=-3<0$ et $a=1$ donc $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+x+1>0$. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+x+1}$ ne s'annulant pas, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par quotient de fonctions dérivables sur leur domaine de définition, on en déduit que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)\times\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} \\ &= \frac{\dfrac{4(x^2+x+1)-(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{(x^2+x+1)} = \frac{\dfrac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{(x^2+x+1)} = \frac{3}{2(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\ . \end{aligned}$$

• Puisque $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)>0$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
• Calcul des limites en $\pm\infty$:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x}{|x|}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$.
• L'image d'un intervalle ouvert par toute application continue et strictement monotone est un ouvert. D'après le tableau de variation de f, la continuité de f, on en déduit que $\mathrm{Im}f =]-2\,;2[$ car l'ensemble $\mathbb{R}$ est un ouvert.
• La fonction f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une fonction réciproque g définie et continue sur $]-2\,;2[$.

2. Puis que f est dérivable et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors g est dérivable sur $]-2\,;2[$.
On a $g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}$. Calculons $g(1)$:

$$x=g(1)\Leftrightarrow f(x)=f(g(1))=1\Leftrightarrow\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(2x+1)^2}{x^2+x+1}=1\\ 2x+1>0\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(2x+1)^2=x^2+x+1\\ 2x+1>0\end{array}\right.$$

On a $(2x+1)^2-(x^2+x+1)=0\Leftrightarrow 3x^2+3x=0\Leftrightarrow\quad x=0$ ou $x=-1$.
La condition $2x+1>0$ entraîne $x=0$. Finalement

$$g'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{2}{3}.$$

Chapitre 5. Exercice A.2.21
1. Dans cette question, on utilise $\mathrm{Im}(\mathrm{Arcsin}\,) = [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Arccos}\,) = [0\,,\pi]$.
Tout d'abord, on a l'équivalence suivante

$$\text{Déterminer } y = \mathrm{Arcsin}\, x \text{ étant donné } x \in [-1\,,1] \Leftrightarrow \text{ Résoudre } x = \sin y \text{ avec la condition } y \in [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$$

Donc

$$\mathrm{Arcsin}\,(\sin\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\pi}{6}, \quad \mathrm{Arcsin}\,(\sin\tfrac{5\pi}{6}) = \mathrm{Arcsin}\,(\sin\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\pi}{6}, \quad \mathrm{Arcsin}\,(\sin\tfrac{7\pi}{6}) = \mathrm{Arcsin}\,(\sin(-\tfrac{\pi}{6})) = -\tfrac{\pi}{6}.$$

$$\text{Déterminer } y = \mathrm{Arccos}\, x \text{ étant donné } x \in [-1\,,1] \Leftrightarrow \text{ Résoudre } x = \cos y \text{ avec la condition } y \in [0\,,\pi]$$

Donc

$$\mathrm{Arccos}\,(\cos\tfrac{5\pi}{6}) = \tfrac{5\pi}{6}, \quad \mathrm{Arccos}\,(\cos\tfrac{7\pi}{6}) = \mathrm{Arccos}\,(\cos\tfrac{5\pi}{6}) = \tfrac{5\pi}{6}.$$

2. On pose $f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x$. On doit montrer que f est constante sur $[-1\,,1]$ et montrer que cette constante est $\frac{\pi}{2}$. Pour cela il suffit de montrer que $f'(x) = 0$ sur $]-1,1[$ et calculer $f(0)$.
• Lest fonction Arcsin et Arccos sont dérivable sur $]-1,1[$ donc f aussi. On a

$$f'(x) = \mathrm{Arcsin}'\, x + \mathrm{Arccos}'\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

• Par conséquent la fonction f est constante sur $[-1\,,1]$ et $\forall\, x \in [-1\,,1]$, $f(x) = f(0)$ et

$$f(0) = \mathrm{Arcsin}(0) + \mathrm{Arccos}(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Chapitre 5. Exercice A.2.6

5. • En pose $f(x) = \text{Arcsin}(2x+1)$. La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1\,,1[$ donc f est dérivable si $2x+1 \in]-1\,,1[\Leftrightarrow x \in]-1\,,0[$ et on a $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{-4x^2-4x}} = \dfrac{1}{\sqrt{-x(x+1)}}$.

• On pose $g(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. La fonction Arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est définie et dérivable pour $x \neq 1$ et on a $g'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2+(x+1)^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.