$\boxed{B}$ Fonctions Lipschitziennes et étude de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Certains critères sur la fonction f permettent de conclure sans passer par la représentation graphique de (u_n).

Definition

1. On dit que f vérifie la **condition de Lipschitz de rapport** $K \in [0, +\infty[$ sur I si

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|.$$

(On dit aussi que f est K-Lipschitzienne.)

2. De plus, si $0 < K < 1$, on dit que f est **contractante**.

Remarques : (1) on a montré (A.2.12 du chap. 4) que si f est contractante alors f admet un unique point fixe.
(2) D'après l'égalité des accroissements finis, si f **est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et f' est bornée** alors $K = \max_{x \in I} |f'(x)|$.

Theorem

On suppose que f est contractante sur I et admet un point fixe noté $\ell \in I$.
Alors la suite récurrente (u_n) converge vers ℓ.

preuve. *en cours*

La démonstration de ce théorème est à connaitre par cœur.

Hypothèse 1 : $\exists\, 0 < K < 1,\ \forall\,(x,y) \in I \times I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$
Hypothèse 2 : $\exists\, \ell \in I,\ \ell = f(\ell)$.

Démonstration : Elle se fait en 3 étapes :

(i) étape 1 : on pose $x = u_n$ et $y = \ell$ dans l'Hyp. 1 et on obtient $|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant K|u_n - \ell|$

(ii) étape 2 : on montre par récurrence que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant K^n|u_0 - \ell|}$

Initialisation à $n = 0$: on a $|u_0 - \ell| = K^0|u_0 - \ell|$, l'égalité entraîne l'inégalité.
Hérédité : Soit $n \geqslant 0$, tel que $|u_n - \ell| \leqslant K^n|u_0 - \ell|$.
On utilise l'Hyp. 2 pour écrire $|f(u_n) - f(\ell)| = |u_{n+1} - \ell|$. Ainsi, d'après l'étape 1 on a
$|u_{n+1} - \ell| \leqslant K|u_n - \ell| \underset{\text{par Hyp. Réc.}}{\Longrightarrow} |u_{n+1} - \ell| < K \times K^n|u_0 - \ell| = K^{n+1}|u_0 - \ell|$.
La proposition est vraie au rang $n+1$.

(iii) étape 3 : La suite de terme général $K^n|u_0 - \ell|$ est une suite géométrique de raison $0 < K < 1$ donc elle converge vers 0. D'après le corollaire 1 du théorème des gendarmes, la suite $u_n - \ell \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. De façon équivalente, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

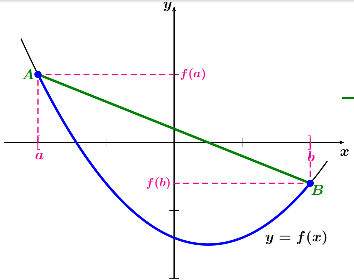
C Fonctions convexes

Definition

On dit que f est **convexe** sur un intervalle I si

$$\forall (a,b) \in I \times I, \qquad \forall t \in [0,1], \qquad f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b).$$

Dans le cas « $\geqslant$ », on dit que f est **concave**.



Exemple de fonction convexe

$[AB] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists t \in [0,1],\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} + (1-t)\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}\right\}$

$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exists t \in [0,1],\ x = ta + (1-t)b \text{ et } y = f(x)\right\}$

$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes en tout point.

Theorem (CNS)

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I alors

$$f \text{ est convexe} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0.$$

preuve. *en cours*

Theorem (minimum local ou global ?)

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ et convexe sur un intervalle I. Alors,

$$\exists\, a \in I,\ f'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(a) \text{ est le minimum global de } f \text{ sur } I.$$

preuve. *en cours*

Exemple. $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$

$$\vdots$$

Theorem (maximum local ou global ?)

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ et concave (càd $f'' \leqslant 0$) sur un intervalle I. Alors,

$$\exists\, a \in I,\ f'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(a) \text{ est le maximum global de } f \text{ sur } I.$$

preuve. Il suffit de remarquer que f concave $\Rightarrow (-f)$ convexe.

Exemple. $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$

$$\vdots$$

Exercice de cours de la section A.1

Pour une meilleure compréhension du cours, vous pouvez faire les exercices suivants :

- Chapitre 4 : A.1.25, A.2.18, A.2.19 (convergence simple et uniforme de suites de fonctions)
- Chapitre 4 : A.1.26, A.1.27 (convergence simple et uniforme de séries de fonctions)
- Chapitre 5 : A.1.5, A.1.6
- Chapitre 5 : A.1.9, A.1.10
- Chapitre 5 : A.1.13

Ces exercices sont à faire en dehors des TDs et avant les 3h de TDs qui suivent ce cours.