

## V Suites de fonctions

### Definition (suite de fonctions)

Soit  $D$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge simplement** vers la fonction  $f$  sur  $D$  ssi  $\forall x \in D, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ .

La fonction  $f$  est appelée **limite simple**.

**Exemple 1.** Etudier la convergence simple sur  $\mathbb{R}$  de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 0}$  où  $f_n(x) = x^n$ .

**Correction.** en cours

⋮

**Exemple 2.** Etudier la convergence simple sur  $\mathbb{R}$  de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  où  $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$ .

**Correction.** en cours

⋮

**Exemple 3.** Etudier la convergence simple sur  $\mathbb{R}$  de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  où  $f_n(x) = \frac{nx}{n^\alpha + x^2}$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Correction.** en cours

⋮

### Definition (Convergence uniforme d'une suite de fonctions)

Soient  $(f_n)_{n \geq n_0}$  une suite de fonctions définies et bornées sur une partie  $D$  non vide de  $\mathbb{R}$ .

Pour tout entier  $n \geq n_0$ , on pose  $u_n = \sup \{|f_n(x) - f(x)|; x \in D\}$ .

La suite  $(f_n)$  **converge uniformément** vers  $f$  sur  $D$  si et seulement si

- ❶ la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est bien définie dans  $\mathbb{R}$ ,
- ❷  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Exemple 1.** La suite de fonctions définies sur  $D = \mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$  converge uniformément vers  $f$  définie par  $f(x) = |x|$ .

**Correction.** *en cours*

⋮

**Exemple 2.** La suite de fonctions définies sur  $D = \mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{nx}{n^\alpha + x^2}$  converge uniformément vers sa limite simple ssi  $\alpha > 2$ .

**Correction.** *en cours*

⋮

**Exemple 3.** La suite de fonctions définies sur  $D = [0, 1]$  par  $f_n(x) = x^n$  ne converge pas uniformément vers sa limite simple.

**Correction.** *en cours*

## Theorem (Interversion des limites)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions **convergeant uniformément** vers une fonction  $f$  sur  $D$ .

De plus si  $(f_n)$  est une suite de fonctions **continues** sur  $D$  **alors** la limite  $f$  est une fonction **continue** sur  $D$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right).$$



Ce résultat est faux en général si la convergence n'est pas uniforme : pour  $f_n(x) = x^n$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) =$$



La limite simple  $f(x)$  peut être continue sans qu'il y ait convergence uniforme.

Il n'y a pas équivalence.