Final MT02 - Exercices de révision

Exercice.
1.Déterminer la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \int_{-\frac{3}{2}}^{x} \frac{1}{2u^2+6u+5} du\ .$$

2. Déterminer la forme générale des primitives de

$$g_1(x) = \frac{2x}{2x^2+6x+5}$$

3. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad xy' + 2y = \frac{2}{2x^2+6x+5}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).
(ii) A l'aide de la variation de la constante, déterminer une solution particulière de (E).
(iii) En déduire l'ensemble des solutions de (E) satisfaisant $y(-1) = 1$. Que vaut $y'(-1)$? $y''(-1)$?
(iv) Peut-on affirmer que $a = -1$ réalise un extremum local de y ? Si oui préciser sa nature.
(v) À l'aide d'une intégration par partie, calculer $Y(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} y(t)\, dt$.
(vi) Effectuer le DL de $Y(2\cos(x))$ au voisinage de $\frac{2\pi}{3}$ à l'ordre 3.

4. Déterminer la forme générale des primitives de

$$g_2(x) = \frac{3x-10}{x^2(2x^2+6x+5)}$$

5. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad xy' - 4y = \frac{3x^4-10x^3}{2x^2+6x+5}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).
(iii) A l'aide de la variation de la constante, déterminer une solution particulière de (E).
(iv) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.