Chapitre 1. Corrigés des exercices.

Exercice A.2.1 : Réécrire ces phrases avec quantificateurs avant d'écrire la négation.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 2$ ou $g(x) \neq 0$.

2. $\exists n \in \mathbb{Z},\ n > 0$ et $n \leq 0$.

3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \leq 1$.

4. $(\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \neq 1)$ ou $\big(\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \neq x_2$ et $e^{x_1} = 1 = e^{x_2}\big)$.

5. $x \geq 0$ et $\sqrt{x}$ n'existe pas. (Insister sur le fait qu'on n'utilise pas le symbole $\nexists$ ici).

6. $n \in \mathbb{N}^*$ et $n^3 - n$ n'est pas un multiple de 3.

Exercice A.2.2 :

1. La première implication est vraie. D'après la table de vérité du connecteur "$\Rightarrow$", si P est toujours fausse dans $P \Rightarrow Q$ alors l'implication est vraie.

2. On peut écrire la contraposée et raisonner comme au **1.**.
Ou bien on se réfère à la table de vérité du connecteurs "$\Rightarrow$" : si Q est toujours vraie dans $P \Rightarrow Q$ alors l'implication est vraie.

Exercice A.2.3 : On doit chercher le seul sous-ensemble A de E pour lequel l'implication suivante est fausse

$$\forall x \in A,\ P(x) \quad \Rightarrow \quad \exists x \in A,\ P(x).$$

Cela signifie que nous devons chercher $A \subset E$ pour lequel la négation de cette implication est vraie :

$$(\forall x \in A,\ P(x)) \quad \text{et} \quad (\forall x \in A, \text{non}\, P(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ \big(P(x) \text{ et non}\, P(x)\big)$$

Puisque la proposition $\big(P(x) \text{ et non}\, P(x)\big)$ est absurde, on en déduit qu'il n'y a aucun élément $x \in E$ satisfaisant cette proposition. Cela se traduit par $A = \varnothing$.

Exercice A.2.4 :

1. $\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in E,\ \big(x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)\big)$.

2. $\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in E,\ \big(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\big)$.

3. $\exists\, x \in E,\ \exists\, y \in E,\ \big(f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y\big)$.

4. Les deux propositions sont identiques.

Exercice A.2.5 : Utiliser dans cet exercice l'équivalence $\boxed{(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (non\,P \text{ ou } Q)}$, les règles de distributivité, commutativité et associativité.

1. $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad Q \Rightarrow (non\,P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\,Q \text{ ou } \big(non\,P \text{ ou } Q\big) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\,Q \text{ ou } Q}_{\text{tautologie}} \text{ ou } non\,P)$

Toujours vraie.

2. $P \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad P \Rightarrow (non\,P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\,P \text{ ou } \big(non\,P \text{ ou } Q\big) \quad \Leftrightarrow \quad non\,P \text{ ou } Q$
Faux si P est vraie et Q est fausse.

3. $P \Rightarrow (P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\,P \text{ ou } \big(P \text{ ou } Q\big) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\,P \text{ ou } P}_{\text{tautologie}} \text{ ou } Q)$

Toujours vraie

4. $P \Rightarrow (P \text{ et } Q) \quad \Leftrightarrow \quad non\,P \text{ ou } \big(P \text{ et } Q\big) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\,P \text{ ou } P)}_{\text{tautologie}} \text{ et } (non\,P \text{ ou } Q) \quad \Leftrightarrow (non\,P \text{ ou } Q)$

Faux si P est vraie et Q est fausse.

5. identique à **3.**

6. $(P \text{ et } Q) \Rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad (non\,P \text{ ou } non\,Q) \text{ ou } Q \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(non\,Q \text{ ou } Q}_{\text{tautologie}} \text{ ou } non\,P)$

Toujours vraie.

Exercice A.2.14 :

2. A démontrer par l'absurde avec $p = 1$.
La phrase est équivalente à

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ n \text{ est pair ou } n^2 - 1 \text{ est un multiple de } 8.$$

Écrire la négation et montrer que la proposition obtenue est fausse.
<u>correction :</u> $\exists\, n \in \mathbb{Z}$, n est impair et $(n^2 - 1)$ n'est pas un multiple de 8.
Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. On calcule

$$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4(k^2 + k) = 4k(k+1).$$

Puisque le produit de deux entiers consécutifs est pair, on en déduit que $k(k+1) = 2q$ avec $q \in \mathbb{Z}$.
Finalement $n^2 - 1 = 8q$ est bien un multiple de 8.
La négation est fausse donc la proposition initiale est donc vraie.

Exercice A.2.16

1. Utiliser les deux équivalences vues en cours :

$$\boxed{\big(P \Rightarrow Q\big) \Leftrightarrow \big((\text{non}\, P) \text{ ou } Q\big)} \quad \text{et} \quad \boxed{\big(P \Rightarrow Q\big) \Leftrightarrow \big(\text{non}\, Q \Rightarrow \text{non}\, P\big)}$$

On a donc

$$\big(P \text{ ou } Q\big) \Leftrightarrow \big(\text{non}(\text{non}\, P) \text{ ou } Q\big) \Leftrightarrow \big(\text{non}\, P \Rightarrow Q\big) \Leftrightarrow \big(\text{non}\, Q \Rightarrow \text{non}(\text{non}\, P)\big) \Leftrightarrow \big(\text{non}\, Q \Rightarrow\ P\big)$$

2. On pose $P :=$« $x^5 - x^4 + x^2 + 3 > 0$ » et $Q :=$« $x < 2$ » .
D'après la question **1.**, montrer que la proposition $(P \text{ ou } Q)$ est vraie est équivalent à montrer que la proposition $((\text{non}\, Q) \Rightarrow P)$ est vraie.
<u>preuve</u> : On suppose $x \geq 2$. On a

$$x^5 - x^4 + x^2 + 3 = x^4(x-1) + x^2 + 3\,.$$

$$x \geq 2 \Rightarrow x - 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow x^4(x-1) > 0$$

et

$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 + 3 > 0$$

Grâce à la compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition, on en déduit que $x^5 - x^4 + x^2 + 3 > 0$.
<u>conclusion</u> : L'implication $((\text{non}\, Q) \Rightarrow P)$ est vraie donc la proposition $(P \text{ ou } Q)$ est vraie.

Exercice A.2.18 : Respecter le symbole "supérieur stricte".

2. Etudier l'hérédité. Cherchons $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq p,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$
correction. $2^{n+1} = 2^n + 2^n$. Par hypothèse de récurrence, $2^n > n^2$ donc on a $2^{n+1} > 2n^2$. Pour conclure, on cherche p tel que $n \geq p \Rightarrow 2n^2 \geq (n+1)^2$. Cela revient à étudier le signe de $n^2 - 2n - 1$ qui est positif pour les entiers $n \geq p = 3$. En concaténant les résultats on aboutit à $2^{n+1} > (n+1)^2$.
On a donc démontré l'hérédité pour $n \geq p = 3$.
Cependant, $P(3)$ et $P(4)$ sont fausse d'où
Initialisation à $n = 5$. $2^n = 2^5 = 32 > 5^2 = 25$ donc $P(5)$ est vraie.
Conclusion : $\forall\, n \in [\![5, +\infty[\![$, $2^n > n^2$.

Exercice A.2.21. On procède par double équivalence.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ce sens est évident : $B \subset A \subset C \quad \Rightarrow \quad A \cup B = A$ et $A \cap C = A$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $A \cup B = A \cap C$ et on montre deux inclusions $B \subset A$ et $A \subset C$.
• Pour montrer $B \subset A$, on montre l'implication $x \in B \Rightarrow x \in A$.

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$$

• Pour montrer $A \subset C$, on montre l'implication $x \in A \Rightarrow x \in C$.

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in C$$

Exercice A.2.25 :

1. Vrai. En effet, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists y = -x \in \mathbb{R},\ x + y = 0$.

2. Faux car la négation est vraie. En effet, $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists x = -y + 1 \in \mathbb{R},\ x + y = 1 \neq 0$

3. Faux car la négation est vraie. En effet, $\exists\, x = 0 \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ xy \neq 1$

4. Faux car la négation est vraie. En effet, $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x = 0 \in \mathbb{R},\ xy = 0 \neq 1$

5. Vrai. En effet, $\exists\, y = 0 \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x + y = x + 0 \neq x$. La valeur $y = 0$ est appelée élément neutre pour l'addition (cf MT03).

Exercice A.2.27 : Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pose

$$K_f = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad I_f = \{y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}.$$

On note E l'ensemble des applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Il faut comprendre que :
Le symbole $\{\cdots\}$ signifie *l'ensemble de*.
K_f est l'ensemble des solutions x dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.
I_f est l'ensemble des images par f ou encore $I_f = \operatorname{Im} f = f(\mathbb{R})$.

1. Voir TP2.

2. Soient $f, g \in E$ telles que $f(0) = g(0) = 0$.

(a) Par hypothèse, $0 \in K_f$ et $0 \in I_g$ donc $0 \in K_f \cap I_g$. On vient de démontrer $K_f \cap I_g \neq \emptyset$.

(b) On doit montrer l'implication $x \in K_g \Rightarrow x \in K_{f\circ g}$.
Soit $x \in K_g$. Alors $g(x) = 0$. On calcule $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$. Cela signifie que $x \in K_{f\circ g}$. On vient de démontrer l'inclusion $K_g \subset K_{f\circ g}$.

(c) On doit montrer l'implication $K_f \cap I_g = \{0\} \Rightarrow K_g = K_{f\circ g}$.
<u>hypothèse :</u> $K_f \cap I_g = \{0\}$.
Cela signifie que le seul réel y appartement à la fois à K_f et I_g est $y = 0$.
<u>but :</u> $K_g = K_{f\circ g}$.
D'après (b), on sait que $K_g \subset K_{f\circ g}$. On doit montrer l'inclusion réciproque $K_{f\circ g} \subset K_g$.
Plus précisément, sous l'hypothèse "$K_g \cap I_f = \{0\}$", on doit montrer l'implication $x \in K_{f\circ g} \Rightarrow x \in K_g$.
Soit $x \in K_{f\circ g}$ Alors $f \circ g(x) = f(g(x)) = 0$.
On pose $y = g(x)$. On a évidemment $y \in I_g$. De plus $f(y) = 0$ donc $y \in K_f$.
Finalement $y \in K_f \cap I_g$. D'après l'hypothèse, $y = 0$.
Or $y = g(x)$ donc $g(x) = 0$ et on en déduit que $x \in K_g$.
On vient de démontrer l'inclusion $K_g \subset K_{f\circ g}$. D'après (b), on conclut l'égalité $K_g = K_{f\circ g}$.

3. Soient $f, g \in E$.

(a) On doit montrer l'implication $y \in I_{f\circ g} \Rightarrow y \in I_f$.
Soit $y \in I_{f\circ g}$. Alors $\exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f \circ g(x) = f(g(x))$. On pose $x' = g(x)$. Alors $y = f(x')$ et $x' \in \mathbb{R}$. Donc $y \in I_f$. On vient de démontrer l'inclusion $I_{f\circ g} \subset I_f$.

(b) On doit montrer l'implication $I_g = \mathbb{R} \Rightarrow I_{f\circ g} = I_f$.
<u>hypothèse :</u> $I_g = \mathbb{R}$.
Cela signifie que $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = g(x)$.
<u>but :</u> $I_{f\circ g} = I_f$.
D'après (a), on sait que $I_{f\circ g} \subset I_f$. On doit montrer l'inclusion réciproque $I_f \subset I_{f\circ g}$.
Plus précisément, sous l'hypothèse "$I_g = \mathbb{R}$", on doit montrer l'implication $z \in I_f \Rightarrow z \in I_{f\circ g}$.
Soit $z \in I_f$. Alors $\exists\, y \in \mathbb{R},\ z = f(y)$.
Par hypothèse, $\exists\, x \in \mathbb{R},\ y = g(x)$.
Par composition, on peut écrire $z = f(g(x)) = f \circ g(x)$. Donc $z \in I_{f\circ g}$.
On vient de démontrer $I_{f\circ g} \subset I_f$. D'après (a), on conclut l'égalité $I_{f\circ g} = I_f$.

Exercice A.2.30 : Dans cet exercice, il est important d'appliquer les indicatrices à un couple $(x, y) \in E \times F$ pour une meilleure comphésion des produits cartésiens.

1. En utilisant l'équivalence

$$(x, y) \in A \times B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ et } y \in B,$$

on peut en déduire que

$$\mathbf{1}_{A \times B}(x, y) = \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y).$$

2. Les hypothèses entrainent les simplifications suivantes

$$C \subset A \subset E \quad \Rightarrow \quad A \cap C = C \quad \Rightarrow \quad \forall x \in E,\ \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_C(x) = \mathbf{1}_C(x) \text{ et } \mathbf{1}_{A \setminus C}(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_C(x),$$

$$D \subset B \subset F \quad \Rightarrow \quad B \cap D = D \quad \Rightarrow \quad \forall y \in F,\ \mathbf{1}_B(y) \times \mathbf{1}_D(y) = \mathbf{1}_D(y) \text{ et } \mathbf{1}_{B \setminus D}(x) = \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_D(x).$$

Pour l'ensemble de gauche, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{(A \times B) \setminus (C \times D)}(x, y) &= \mathbf{1}_{(A \times B)}(x, y) - \mathbf{1}_{(A \times B)}(x, y) \times \mathbf{1}_{(C \times D)}(x, y) \\
&= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) \times \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y) \\
&= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y).
\end{aligned}$$

Pour l'ensemble de droite , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{((A \setminus C) \times B) \cup (C \times (B \setminus D))}(x, y) &= \mathbf{1}_{((A \setminus C) \times B)}(x, y) + \mathbf{1}_{(C \times (B \setminus D))}(x, y) - \mathbf{1}_{((A \setminus C) \times B)}(x, y) \times \mathbf{1}_{(C \times (B \setminus D))}(x, y) \\
&= \mathbf{1}_{((A \setminus C)}(x) \times \mathbf{1}_B(y) + \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_{((B \setminus D)}(y) - \underbrace{\mathbf{1}_{((A \setminus C)}(x) \times \mathbf{1}_B(y) \times \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_{((B \setminus D)}(y)}_{=0} \\
&= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_B(y) + \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y) \\
&= \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) - \mathbf{1}_C(x) \times \mathbf{1}_D(y).
\end{aligned}$$

Les deux ensembles sont égaux.