Exercices du chapitre 1 - Corrigé du TP1

Exercice 1. Soient P, Q et R trois propositions. Parmi les implications suivantes, laquelle (ou lesquelles) est (sont) toujours vraie(s) ?

1. $(P \text{ ou } R) \Rightarrow P$ est fausse si P Faux et R Vrai.
2. $(P \text{ et } Q) \Rightarrow Q$ est toujours vraie.
3. $\Big((P \text{ et non}\, Q) \text{ ou } R\Big) \;\Rightarrow\; (P \Rightarrow R)$
$$\Leftrightarrow \quad \Big((P \text{ et non}\, Q) \text{ ou } R\Big) \;\Rightarrow\; (\text{non}\, P \text{ ou } R)$$
$$\Leftrightarrow \quad \Big((P \text{ ou } R) \text{ et } (\text{non}\, Q \text{ ou } R)\Big) \;\Rightarrow\; (\text{non}\, P \text{ ou } R)$$
est fausse si P et R sont Faux et Q est Vrai.
4. $\Big((P \text{ et non}\, Q) \text{ ou } R\Big) \;\Rightarrow\; (Q \Rightarrow R)$
$$\Leftrightarrow \quad \Big((P \text{ ou } R) \text{ et } (\text{non}\, Q \text{ ou } R)\Big) \;\Rightarrow\; (\text{non}\, Q \text{ ou } R)$$
est toujours vrai.
5. $\Big((P \text{ et non}\, Q) \text{ ou } R\Big) \;\Rightarrow\; (\text{non}\, R \Rightarrow P)$
$$\Leftrightarrow \quad \Big((P \text{ ou } R) \text{ et } (\text{non}\, Q \text{ ou } R)\Big) \;\Rightarrow\; (R \text{ ou } P)$$
est toujours vraie.
6. $\Big((P \text{ et non}\, Q) \text{ ou } R\Big) \;\Rightarrow\; (\text{non}\, R \Rightarrow Q)$
$$\Leftrightarrow \quad \Big((P \text{ ou } R) \text{ et } (\text{non}\, Q \text{ ou } R)\Big) \;\Rightarrow\; (R \text{ ou } Q)$$
est fausse si Q et R sont Faux et P est Vrai.

Exercice 2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Écrire, à l'aide de quantificateurs, la négation des propositions P suivantes.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ f(x) < f(y)$.
   négation : $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(y)$.
   (b) $\forall y > 0, \exists\, x \in \mathbb{R},\quad f(x+y) \neq f(x-y)$.
   négation : $\exists y > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x-y)$.
   (c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x = y) \Rightarrow \big(\, f(x) = f(y)\, \big)$.
   négation : $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y$ et $f(x) \neq f(y)$.
   (d) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$.
   réécriture : $\Big(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x)\Big)$ et $\Big(\forall x \in \mathbb{R}, \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ \big(y_1 = f(x)$ et $y_2 = f(x)\big) \Rightarrow y_1 = y_2\Big)$
   négation : $\Big(\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y \neq f(x)\Big)$ ou $\Big(\exists\, x \in \mathbb{R},\ \exists (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ y_1 \neq y_2$ et $y_1 = f(x)$ et $y_2 = f(x)\Big)$.

2. Que signifie P ou (non P) en langage mathématique.
   (a) La négation signifie « $f(x)$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$ ».
   (b) La négation signifie que « f est périodique de période $2y$ ».
   (c) L'affirmation signifie qu'un élément de $\mathbb{R}$ admet au plus une image. C'est la définition d'une fonction.
   (d) L'affirmation signifie que tout élément de $\mathbb{R}$ admet une et une seule image. C'est la définition d'une application sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Indiquer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ (x+1=0 \text{ et } x+2=0)$. Faux car la négation est vraie.
   négation : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (x \neq -1 \text{ ou } x \neq -2)$ est vraie.
   En pratique, on dit que le système n'admet aucune solution.
2. $(\exists\, x \in \mathbb{R},\ x+1=0)$ et $(\exists\, x \in \mathbb{R},\ x+2=0)$. Vrai
3. $\exists\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+1=0 \text{ et } y+2=0)$. Vrai
4. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y \geq 0$. Faux car la négation est vraie.
   négation : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x+y < 0$ est vraie avec $y = -x-1$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x+y \geq 0$ est vraie avec $y = -x$.
6. $\exists\, x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z = xy$. Faux car la négation est vraie.
   négation : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \exists y \in \mathbb{R}^*,\ \exists z \in \mathbb{R}^*,\ z \neq xy$ est vraie avec $z = x \in \mathbb{R}^*$ et $y = 2 \in \mathbb{R}^*$.
7. $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \exists\, x \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z = xy$ est fausse car la négation est vraie.
   négation : $\exists\, y \in \mathbb{R}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \exists z \in \mathbb{R}^*,\ z \neq xy$ est vraie avec $z = 2xy \in \mathbb{R}^*$.
8. $\forall z \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \exists\, x \in \mathbb{R}^*,\ z = xy$ est vrai avec $x = \dfrac{z}{y}$.

Exercice 4. Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit ouvert si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall\, x \in A,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ (y \in]x-\eta\,, x+\eta[\Rightarrow\ y \in A)\ .$$

1. Écrire la négation de la proposition.
   négation : $\exists\, x \in A,\ \forall\, \eta > 0,\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ (y \in]x-\eta\,, x+\eta[\ \text{ et }\ y \notin A)\ .$
2. Dans la proposition originale, remplacer l'implication par sa contraposée.
   contraposée : $\forall\, x \in A,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ (y \notin A\ \Rightarrow\ y \notin]x-\eta\,, x+\eta[)\ .$
3. Écrire la négation de la proposition ainsi obtenue.
   négation de la contraposée : $\exists\, x \in A,\ \forall\, \eta > 0,\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ (y \notin A\ \text{ et }\ y \in]x-\eta\,, x+\eta[)\ .$
4. Comparer les deux négations obtenues en 1) et 3).
   Les deux propositions sont identiques
5. Montrer que l'intervalle $[0\,, 1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
   On démontre la négation : $\exists\, x = 0 \in A,\ \forall\, \eta > 0,\ \exists\, y = -\frac{\eta}{2} \in \mathbb{R},\ (y \in]-\eta\,, +\eta[\ \text{ et }\ y \notin [0, 1[)\ .$