

# Chapitre 2. Corrigés des exercices.

## Exercice A.2.6 :

1. Pour  $y \in \mathbb{R}$  on détermine le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = y$  :

$$\frac{2x}{1+x^2} = y \Leftrightarrow 2x = y(1+x^2) \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0.$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré ssi  $y \neq 0$ .

1. Si  $y = 0$  alors l'équation admet une unique solution  $x = 0$ .
2. Si  $y \neq 0$  alors les résultats dépendent du signe du discriminant :
  - Si  $\Delta = 4 - 4y^2 < 0$  alors l'équation  $y = f(x)$  n'admet aucune solution. Les valeurs  $y \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  n'admettent aucun antécédent par  $f$ . Donc  $f$  n'est pas surjective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On peut écrire la négation

$$\exists y = 2, \forall x \in \mathbb{R}, y \neq f(x)$$

est vrai. Le discriminant associé est  $\Delta = -3 < 0$ .

- Si  $\Delta = 4 - 4y^2 > 0$ , l'équation admet exactement 2 solutions distinctes :

$$\exists x_1 = \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \in \mathbb{R}, \exists x_2 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2) = y.$$

La fonction  $f$  n'est pas injective de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . La négation est vrai. On choisit  $y = \frac{1}{2}$  qui admet admet 2 antécédents  $x_1 = 2 + \sqrt{3}$  et  $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ . On peut écrire la négation

$$\exists (x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2} \text{ et } x_1 \neq x_2.$$

**2.**  $\text{Im } f$  est l'ensemble des valeurs  $y \in \mathbb{R}$  telles que l'équation  $y = f(x)$  admette au moins une solution. Cela équivaut à la condition  $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1, 1]$ .

On a déjà vu que  $y = 0$  admet un seul antécédent  $x = 0$ .

Si  $y \in ]-1, 1[$  avec  $y \neq 0$  alors on montre que  $x_1 \notin ]-1, 1[$  et  $x_2 \in ]-1, 1[$  : on a

$$x_1 \in ]-1, 1[ \Leftrightarrow |x_1| < 1 \Leftrightarrow (x_1)^2 < 1 \Leftrightarrow (1 + \sqrt{1-y^2}) < y^2 \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{1-y^2} + (1-y^2) < y^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-y^2} < 2(y^2-1)$$

$$x_2 \in ]-1, 1[ \Leftrightarrow |x_2| < 1 \Leftrightarrow (x_2)^2 < 1 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{1-y^2}) < y^2 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{1-y^2} + (1-y^2) < y^2 \Leftrightarrow 2(1-y^2) < 2\sqrt{1-y^2}$$

Or,  $y \in ]-1, 1[$  et  $y \neq 0 \Rightarrow 0 < 1 - y^2 < 1$  et  $a < \sqrt{a} \Leftrightarrow a \in ]0, 1[$ . Par conséquent la première phrase est fautive et la seconde est vraie.

$$1 + \sqrt{1-y^2} > 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} > \frac{1}{y} > 1 \text{ si } 0 < y < 1 \\ \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} < \frac{1}{y} < -1 \text{ si } -1 < y < 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 \notin [-1, 1].$$

$$1 + \sqrt{1-y^2} > 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1-y^2} < (1 - \sqrt{1-y^2})(1 + \sqrt{1-y^2}) = y^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x_2 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} < y < 1 \text{ si } 0 < y < 1 \\ -1 < y < x_2 = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y} < 0 \text{ si } -1 < y < 0. \end{cases} \Rightarrow x_2 \in ]-1, 1[.$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

### Exercice A.2.3 :

1. Soit  $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ , montrer que l'équation  $\vec{y} = f(\vec{x})$  admet une unique solution.

Avec les notations  $\vec{y} = (y_1, y_2)$  et  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ , cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & y_1 & (L_1) \\ 2x_1 + 3x_2 & = & y_2 & (L_2) \end{cases}$$

Par la méthode d'élimination, on a :

$$L_2 - 2 \times L_1 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = y_2 - 2y_1} \quad \text{et} \quad L_2 - 3 \times L_1 \Leftrightarrow -x_1 = y_2 - 3y_1 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = 3y_1 - y_2}$$

Le système admet une unique solution.

Conclusion :  $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^2, \exists! \vec{x} = (3y_1 - y_2, y_2 - 2y_1) \in \mathbb{R}^2, \vec{y} = f(\vec{x}) \Leftrightarrow f$  est bijective.

On peut aussi conclure que  $f$  admet une application réciproque définie de  $\mathbb{R}^2$  dans lui même par

$$f^{-1}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}$$

Vérifions que  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$  :

$$f \circ f^{-1}(x) = \begin{pmatrix} (3x_1 - x_2) + (x_2 - 2x_1) \\ 2(3x_1 - x_2) + 3(x_2 - 2x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f(x) = \begin{pmatrix} 3(x_1 + x_2) - (2x_1 + 3x_1) \\ (2x_1 + 3x_2) - 2(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

2. Pour la non injectivité : Écrire la négation de “ $f$  est injective” :

$$\exists(\vec{x}, \vec{x}') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \vec{x} \neq \vec{x}' \text{ et } f(\vec{x}) = f(\vec{x}').$$

Justifier cette phrase : trouver par exemple deux vecteurs distincts dont les images sont égales au vecteur nul.

Poser  $\vec{x} = (0, 0)$  et  $\vec{x}' = (3, 2)$ . On a bien  $f(\vec{x}) = f(\vec{x}') = \vec{0}$  et  $\vec{x} \neq \vec{x}'$ .

Pour la surjectivité : résoudre, pour  $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$  fixé, l'équation  $\vec{y} = f(\vec{x})$ . Posons le système

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 & = & y_1 & (L_1) \\ -4x_1 + 6x_2 & = & y_2 & (L_2) \end{cases} \quad \xrightarrow{2 \times L_1 + L_2} \quad 0 = 2y_1 + y_2$$

Par contraposée, pour tout vecteur  $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$  tels que  $0 \neq 2y_1 + y_2$ , le système n'admet aucune solution.

La fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  n'est donc pas surjective. Par exemple,

$$\exists \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{y} \neq f(\vec{x}).$$

Cela signifie que le système  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 & = & 2 & (L_1) \\ -4x_1 + 6x_2 & = & 0 & (L_2) \end{cases}$  n'admet aucune solution.

En effet  $L_2 + 2L_1 \Rightarrow 0 = -4$ . Ce qui est absurde

**Exercice A.2.4 :****2.**montrons que  $( f \text{ surjective et } g \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ injective } )$ hyp :  $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$  et  $\forall z \in C, \exists y \in B, z = g(y)$ but :  $\forall z \in C, \exists x \in A, z = g \circ f(x)$ dém : Soit  $z \in C$ . Comme  $g$  est surjective, on sait qu' $\exists y \in B, z = g(y)$  (#).Comme  $f$  est surjective, on sait qu' $\exists x \in A, y = f(x)$ .Par substitution dans (#), on a  $z = g(f(y)) = g \circ f(y)$ .La proposition avec quantificateurs de la surjectivité de  $g \circ f$  est démontrée.**5.** On démontre plutôt la contraposée de l'implication énoncée :montrons que  $( g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective } )$ hyp :  $\forall z \in C, \exists x \in A, z = g \circ f(x)$ but :  $\forall z \in C, \exists y \in B, z = g(y)$ dém : Soit  $z \in C$ . Par hypothèse, il existe un élément  $x \in A$  tel que  $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ .On pose  $y = f(x)$ . On a  $y \in B$  et par substitution  $z = g(y)$ .La proposition avec quantificateurs de la surjectivité de  $g$  est démontrée.conclusion : la contraposée est démontrée donc l'implication initiale $( g \text{ n'est pas surjective } \Rightarrow g \circ f \text{ n'est pas surjective } )$ 

est vraie.

**6.**montrons que  $( g \circ f \text{ injective et } f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ injective } )$ hyp 1 :  $\forall (x, x') \in A^2, (g \circ f(x) = g \circ f(x') \Rightarrow x = x')$ hyp 2 :  $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$ but :  $\forall (y, y') \in B^2, (g(y) = g(y') \Rightarrow y = y')$ dém : Soient  $y \in B$  et  $y' \in B$  tel que  $g(y) = g(y')$ . Comme  $f$  est surjective (hyp 2),  $y$  et  $y'$  admettent des antécédents par  $f$  qu'on note  $x$  et  $x'$  respectivement : on a  $\boxed{y = f(x) \text{ et } y' = f(x')}$ .Par substitution, on obtient  $g(f(x)) = g(f(x')) \Leftrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$ . Comme  $g \circ f$  est injective (hyp 1), on en déduit que  $x = x'$ . En appliquant la fonction  $f$  à cette dernière égalité, on a  $f(x) = f(x')$ .Autrement dit, on a  $y = y'$ .La proposition avec quantificateurs de l'injectivité de  $g$  est démontrée.**7.**montrons que  $( g \circ f \text{ surjective et } g \text{ injective } \Rightarrow f \text{ surjective } )$ hyp 1 :  $\forall z \in C, \exists x \in A, z = g \circ f(x)$ hyp 2 :  $\forall (y, y') \in B^2, (g(y) = g(y') \Rightarrow y = y')$ but :  $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$ dém : Soit  $y \in B$ . On applique la fonction  $g$  à  $y$  pour obtenir un élément  $z = g(y) \in C$ . On peut ainsi appliquer l'hypothèse 1 : il existe  $x \in A$  tel que  $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ .Finalement on a l'égalité  $g(y) = g(f(x))$ . Comme  $g$  est injective (hyp 2), on en déduit que  $y = f(x)$ .La proposition avec quantificateurs de la surjectivité de  $f$  est démontrée

**Exercice A.2.7.**

1. On rappelle que

$$X_B = \{x \in E; f(x) \in B\}$$

et

$$f(X_B) = \{y \in F; \exists x \in X_B, y = f(x)\}.$$

(a) Montrer  $y \in f(X_B) \Rightarrow y \in B$ .

Soit  $y \in f(X_B)$ . Alors  $\exists x \in X_B, y = f(x)$ .

Or  $x \in X_B \Rightarrow f(x) \in B$ . Donc  $y = f(x) \in B$ .

On a montré que  $f(X_B) \subset B$ .

(b) Contre-exemple : avec  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto f(x) = x^2$

$$\left( B = [-1, 1] \Rightarrow X_B = [-1, 1] \Rightarrow f(X_B) = [0, 1] \text{ et } B \not\subset f(X_B) \right).$$

(c) On suppose que  $f$  est surjective et on doit démontrer l'inclusion réciproque  $B \subset f(X_B)$ .

C'est-à-dire montrer que  $y \in B \Rightarrow y \in f(X_B)$ .

Soit  $y \in B$ . Comme  $f$  est surjective,  $\exists x \in E, y = f(x)$ . Donc  $x \in X_B$  car  $f(x) \in B$ .

Par définition,  $y \in f(X_B)$ .

2. On rappelle que

$$f(A) = \{y \in F; \exists x \in A, y = f(x)\}$$

et

$$X_{f(A)} = \{x \in E; f(x) \in f(A)\}.$$

(a) montrer que  $x \in A \Rightarrow x \in X_{f(A)}$ .

Soit  $x \in A \subset E$ . Alors  $f(x) \in f(A)$ . Par définition de  $X_{f(A)}$ , on a  $x \in X_{f(A)}$ .

(b) Contre-exemple : avec  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; x \mapsto f(x) = x^2$

$$\left( A = [0, 1] \Rightarrow f(A) = [0, 1] \Rightarrow X_{f(A)} = [-1, 1] \not\subset A \right).$$

(c) On suppose  $f$  injective et on doit montrer l'inclusion réciproque  $X_{f(A)} \subset A$ .

C'est-à-dire montrer que  $x \in X_{f(A)} \Rightarrow x \in A$ .

Soit  $x \in X_{f(A)}$  alors  $x \in E$  et  $f(x) \in f(A)$ .

Par définition de  $f(A)$ , il existe  $x' \in A$  tel que  $f(x) = f(x')$ .

Comme  $f$  est injective, on déduit que  $x = x'$  et  $x \in A$ .