Chapitre 2. Corrigés des exercices.

Exercice A.2.5 :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ x & \mapsto & f(x)=y & \mapsto & g(y)=g\circ f(x)=g(f(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ y & \mapsto & g(y)=z & \mapsto & h(z)=h\circ g(y)=h(g(y)) \end{array}$$

On suppose que les composées sont $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

1. A l'aide de l'exercice **A.2.4**, on montre que g est bijective. En effet, on a d'après les contraposées des questions **4.** et **5.**, en remplaçant g par h et f par g,

$$(\ h\circ g \text{ injective} \quad \Rightarrow \quad g \text{ injective }\ )$$

$$(\ g\circ f \text{ surjective} \quad \Rightarrow \quad g \text{ surjective }\ )$$

D'après le cours

$$g \text{ injective et } g \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad g \text{ bijective.}$$

Pour terminer on a les implications du cours suivantes :

$$g\circ f \text{ bijective et } g \text{ bijective} \quad \Rightarrow \quad g\circ f \text{ bijective et } g^{-1} \text{ bijective} \ \Rightarrow \quad g^{-1}\circ(g\circ f) = id_B\circ f = f \text{ bijective}$$

et

$$h\circ g \text{ bijective et } g \text{ bijective} \quad \Rightarrow \quad h\circ g \text{ bijective et } g^{-1} \text{ bijective} \ \Rightarrow \quad (h\circ g)\circ g^{-1} = h\circ id_C = h \text{ bijective}$$

2. On utilise les formules du cours pour exprimer f_1 et h_1 en fonction de f^{-1}, g^{-1} et h^{-1}. On a

$$f_1 = (g\ \circ\ f)^{-1} = f^{-1}\ \circ\ g^{-1} \quad \text{ et } \quad h_1 = (h\ \circ\ g)^{-1} = g^{-1}\ \circ\ h^{-1}\ .$$

On obtient

$$f_1\circ g = (f^{-1}\ \circ\ g^{-1})\circ g = f^{-1}\ \circ\ id_B = f^{-1}$$

$$f\circ f_1 = f\circ(f^{-1}\ \circ\ g^{-1}) = id_B\circ\ g^{-1} = g^{-1}$$

$$h_1\circ h = (g^{-1}\ \circ\ h^{-1})\circ h = g^{-1}\ \circ\ id_C = g^{-1}$$

$$g\circ h_1 = g\circ(g^{-1}\ \circ\ h^{-1}) = id_C\circ\ h^{-1} = h^{-1}$$

Exercice 2 hors poly : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. $\boxed{\text{Démontrer que si } A \text{ admet un plus grand élément } \alpha \in \mathbb{R} \text{ alors } \sup A \text{ existe et } \sup A = \alpha.}$

hypothèse : $\exists\, \alpha \in A, \forall\, x \in A,\ x \leq \alpha.$

but : α est le plus petit des majorants de A.

preuve : L'ensemble A est une partie non vide ($\alpha \in A$) et majorée (par α) de $\mathbb{R}$ donc $\sup A$ existe.
Il reste à démontrer que $\alpha = \sup A$:

$$\sup A \text{ est un majorant de } A \text{ et } \alpha \in A \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq \sup A$$

$$\alpha \text{ est un majorant et } \sup A \text{ est le plus petit des majorants} \quad \Rightarrow \quad \sup A \leq \alpha.$$

On en déduit que $\alpha = \sup A$. Fait en cours.

2. $\boxed{\text{Démontrer que si } A \text{ admet un plus petit élément } \beta \in \mathbb{R} \text{ alors } \inf A \text{ existe et } \inf A = \beta.}$

hypothèse : $\exists\, \beta \in A, \forall\, x \in A,\ \beta \leq x.$

but : β est le plus grand des minorants de A.

preuve : L'ensemble A est une partie non vide ($\beta \in A$) et minorée (par β) de $\mathbb{R}$ donc $\inf A$ existe.
Il reste à démontrer que $\beta = \sup A$:

$$\inf A \text{ est un minorant de } A \text{ et } \beta \in A \quad \Rightarrow \quad \inf A \leq \beta$$

$$\beta \text{ est un minorant et } \inf A \text{ est le plus grand des minorants} \quad \Rightarrow \quad \beta \leq \inf A.$$

On en déduit que $\beta = \inf A$.

Exercice A.2.12 : Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.

1. Montrons que $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ existent.
D'après l'énoncé, les ensembles A et B sont non vides et bornées ($\Leftrightarrow$ majorés et minorés) dans $\mathbb{R}$. D'après les axiomes des bornes inférieures et supérieures, les quatres éléments $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ existent.

2. Montrons que $\sup A \leq \sup B$.
<u>dém</u> : Par définition, $\sup B$ est un majorant de B. Ce qui s'écrit $\forall\, x \in B,\ x \leq \sup B$.
Comme $A \subset B$, on peut écrire $\forall\, x \in A,\ x \leq \sup B$. Autrement dit, $\sup B$ est un majorant de A.
Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, on obtient $\sup A \leq \sup B$.

3. Montrons que $\inf B \leq \inf A$.
<u>dém</u> : Par définition, $\inf B$ est un minorant de B. Ce qui s'écrit $\forall\, x \in B,\ \inf B \leq x$.
Comme $A \subset B$, on peut écrire $\forall\, x \in A,\ \inf B \leq x$. Autrement dit, $\inf B$ est un minorant de A.
Comme $\inf A$ est le plus grand des minorants de A, on obtient $\inf B \leq \inf A$.

Exercice A.2.11 : Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\,(a,b) \in A \times B,\ a < b\ .$$

1. • Tout d'abord on montre que $\inf B$ existe :
L'hypothèse peut s'écrire : $\forall\, a \in A,\ \underbrace{\forall\, b \in B,\ a < b}_{\Leftrightarrow\, a \text{ minore } B} \quad \Rightarrow \quad \forall\, a \in A,\ B$ est minoré par a.
Comme $A \neq \varnothing$, on en déduit $\exists\, a \in A$ et B est bien un ensemble minoré par a.
D'après l'axiome de la borne inférieure, $\inf B$ existe.
NB : le symbole $\forall$ n'implique pas le symbole $\exists$!!!

• On montre que $\sup A$ existe de la même façon :
On peut intervertir les quantificateurs : $\forall\, b \in B,\ \underbrace{\forall\, a \in A,\ a < b}_{\Leftrightarrow\, b \text{ majore } A} \quad \Rightarrow \quad \forall\, b \in B,\ A$ est majoré par b.
Comme $B \neq \varnothing$, on en déduit $\exists\, b \in B$ et A est bien un ensemble majoré par b.
D'après l'axiome de la borne supérieure, $\sup A$ existe.

2. On commence la démonstration pour l'hypothèse

$$\forall\, b \in B,\ A \text{ est majoré par } b$$

Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, on peut écrire

$$\forall\, b \in B,\ \sup A \leq b$$

Cette dernière phrase se réinterprète par : $\sup A$ est un minorant de l'ensemble B.

Comme $\inf B$ est le plus grand des minorants, on peut écrire : $\sup A \leq \inf B$.

3. La réponse est NON pour des A et B quelconques. Un contre exemple est

$$A =]-\infty, 0] \qquad \text{et} \qquad B =]0, +\infty[\ .$$

On a bien $\forall\,(a,b) \in A \times B,\ a \leq 0 < b$ et pourtant $\sup A = 0 = \inf B$.

Exercice A.2.14 : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On pose

$$B = \{x \in [0,1]\,;\ f(x) \geq x\}\ .$$

1. Par hypothèse, l'espace d'arrivée de f est $[0,1]$. Cela signifie que $\mathrm{Im} f \subset [0,1]$ et donc

$$\forall\, x \in [0,1],\ f(x) \in [0,1] \Rightarrow f(0) \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq f(0) \leq 1\ .$$

On en déduit que $0 \in B$ et donc $B \neq \varnothing$.
2. Par définition de l'ensemble B, on a $B \subset [0,1]$ donc B est majoré par 1. L'ensemble B est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc d'après l'axiome de la borne supérieure, $b = \sup B$ existe.
D'après la question **1.**, on sait que $0 \in B$ et b est un majorant de B donc $b \geq 0$.
Sachant que 1 est un majorant de B et que b est le plus petit des majorants, on en déduit que $b \leq 1$.
En conclusion, $0 \leq b$ et $b \leq 1$ donc $b \in [0,1]$.

3. Puisque b est la borne supérieure de B on peut écrire $\forall\, x \in B,\ x \leq b$.
On applique la fonction f qui est croissante pour obtenir $\forall\, x \in B,\ f(x) \leq f(b)$.
Comme $x \in B \Rightarrow f(x) \geq x$, on en déduit que $\forall\, x \in B,\ x \leq f(b)$. Ceci signifie que $f(b)$ est un majorant de B.
Comme b est le plus petit des majorants, on a $b \leq f(b)$.
On rappelle que $b \in [0,1]$ d'après la question **2.**
En conlusion, on a $b \in B$.
4. Soit $x \in B$. Alors $x \in [0,1]$ et $x \leq f(x)$.
On applique la fonction f. D'une part $\mathrm{Im} f \subset [0,1] \Rightarrow f(x) \in [0,1]$.
D'autre part, f est croissante donc $f(x) \leq f(f(x))$.
Cela signifie que $f(x) \in B$.
5. On utilise l'antisymétrie de la relation d'ordre $\leq$.
Pour montrer que $b = f(b)$, on montre que $f(b) \leq b$ et $b \leq f(b)$.
On a déjà montré à la question **3.** que $b \leq f(b)$ et que $b \in B$.
D'après la question **4.**, $b \in B \Rightarrow f(b) \in B$. Comme b est la borne supérieure de B on a $f(b) \leq b$.
En conclusion $b = f(b)$. On dit que b est un point fixe de f.
6. La réponse est non. Prendre comme contre-exemple, une fonction non continue définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La fonction f est bien une application de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et décroissante. Cependant l'équation $f(x) = x$ n'admet aucune solution.