Exercice A.2.4 :

(vii) On rappelle que $n!$ est le factoriel de n et correspond au produit des n premiers entiers (en commençant par 1 biensûr) :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

On réécrit alors u_n comme un produit de n fractions :

$$u_n = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n}{n \times n \times n \times \cdots \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n}.$$

On remarque alors que les numérateurs sont toujours inférieurs ou égaux au dénominateurs puisqu'il s'agit des entiers plus petit que n. On a donc

$$u_n = \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n}}_{\leq 1}$$

On conclut avec le théorème des gendarmes : comme $\forall\, n \geq 1, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, on a

$$\frac{1}{n} \underset{\to\infty}{\to} 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{\to\infty}{\to} 0.$$

(viii) On procède comme au (vi). On réécrit u_n comme un produit de n fractions :

$$u_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n-1} \times \frac{2}{n}.$$

Exceptée la première fraction, les dénominateurs sont toujours supérieurs ou égaux au numénateurs puisqu'il s'agit des entiers compris entre 2 et n. On a donc

$$u_n = \frac{2}{1} \times \underbrace{\frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{n-1}}_{\leq 1} \times \frac{2}{n}$$

On conclut avec le théorème des gendarmes : comme $\forall\, n \geq 1, 0 \leq u_n \leq \frac{4}{n}$, on a

$$\frac{4}{n} \underset{\to\infty}{\to} 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{\to\infty}{\to} 0.$$

(ix) Il s'agit du produit des deux précédentes suites :

$$u_n = \frac{2^n}{n^n} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{2^n}{n!}.$$

D'après les opérations sur les limites des suites convergentes, on en déduit que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Exercice A.2.5 : Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 0$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_n = 1 - \frac{1}{n} & \text{si } n \geq 2 \text{ est pair} \\ u_n = 1 - \frac{1}{n-2} & \text{si } n \geq 3 \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = 0$, $u_4 = \frac{3}{4}$, $u_5 = \frac{2}{3}$.

2. On pose $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrons que $\sup A = 1$.

(i) On a $u_0 = u_1 = 0 \leq 1$. Pour $n \geq 2$ pair, on a

$$\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow u_n = 1 - \frac{1}{n} < 1\ .$$

Pour $n \geq 3$ impair, on a

$$\frac{1}{n-2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{n-2} < 0 \Rightarrow u_n = 1 - \frac{1}{n-2} < 1\ .$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$, donc 1 est un majorant de A.

(ii) Il reste à montrer que c'est le plus petit des majorants. Soit $t < 1$. On montre que le réel t ne peut pas être un majorant de A. On cherche alors un terme de la suite (u_n) supérieur à t. Limitons nous aux termes d'indices pairs.

$$t < u_{2p} \Leftrightarrow t < 1 - \frac{1}{2p} \Leftrightarrow t - 1 < -\frac{1}{2p} \Leftrightarrow \frac{1}{2(t-1)} < p\ .$$

La fonction partie entière fournit le plus petit entier satisfaisant cette inégalité : $p = E\big(\frac{1}{2(t-1)}\big) + 1$, puis on pose $n = 2[E\big(\frac{1}{2(t-1)}\big) + 1]$. On a montré

$$\forall\, t > 1, \exists\, n = 2[E\big(\tfrac{1}{2(t-1)}\big) + 1] \in \mathbb{N},\ t < u_n\ .$$

Conclusion : $\sup A = 1$.

3. On veut montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, à l'aide de la définition avec quantificateurs.

but : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n > N \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon)$.

preuve : On fixe $\varepsilon > 0$. On résoud $|u_n - 1| < \varepsilon$ en distinguant les cas $n \geq 2$ pair et $n \geq 3$ impair.
On commence avec $n \geq 2$ pair : $|u_n - 1| = \frac{1}{n}$, donc

$$|u_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}\ .$$

Posons, $N_1 = E\big(\frac{1}{\varepsilon}\big) + 1$.
Dans le cas $n \geq 3$ impair : $|u_n - 1| = \frac{1}{n-2}$, donc

$$|u_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n-2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} + 2\ .$$

Posons, $N_2 = E\big(\frac{1}{\varepsilon} + 2\big) + 1$.
conclusion : Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists\, N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$, $(n > N \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon)$.

4. On procède par l'absurde. On suppose que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang ce qui se traduit par :
hypothèse : $\exists\, N \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, $(n > N \Rightarrow u_n < u_{n+1})$.
Par conséquent, si on choisit $n > N$ pair alors $n + 1$ est impair et on a

$$u_n < u_{n+1} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n-1} \Rightarrow n < n - 1 \Rightarrow 0 < -1 \text{ (absurde)}\ .$$

conclusion : Non, la suite n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

Exercice A.2.7 - Question 3 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$. Nous allons étudier les suites récurrentes définies par le choix arbitraire de $u_0 \in [0, +\infty[$ et de terme général défini par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Comme indiqué en cours, commencez par rechercher les limites possibles d'une telle suite en résolvant l'équation

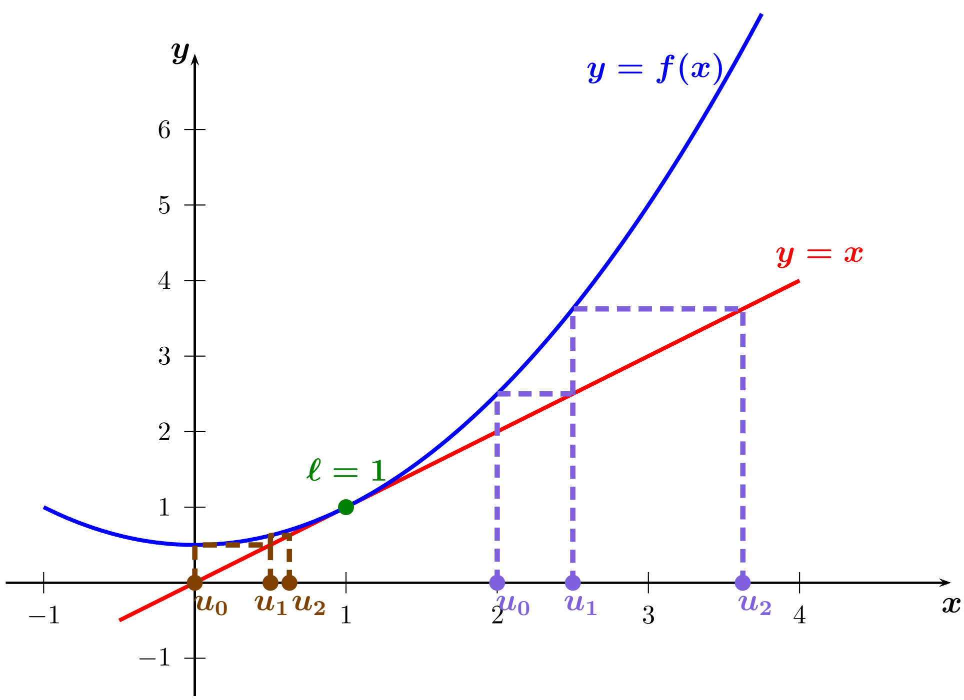
$$f(\ell) = \ell.$$

On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2} = x \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}.$$

La fonction admet donc un seul point fixe. On sait donc que **si la suite (u_n) converge alors sa seule limite possible est $\ell = 1$**.

Pour la représentation graphique, on construit les premiers termes de plusieurs suites en choisissant u_0 de part et d'autres de la valeur $\ell = 1$. Sur le schéma ci-dessous, on a choisi $\boldsymbol{u_0 = 0}$ puis $\boldsymbol{u_0 = 2}$.



Ceci fait, conjecturons tous les comportements possibles dans l'hypothèse où $u_0 \geq 0$:

(i) Si $u_0 \in [0, 1[$, alors la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.

(ii) Si $u_0 = 1$ alors la suite u_n est constante.

(iii) Si $u_0 > 1$, alors la suite (u_n) est croissante et n'est pas majorée. Elle diverge vers $+\infty$.

(b) Démonstrations des conjectures :

(i) **Hypothèse** : $u_0 \in [0, 1[$.

• On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 1$

<u>Initialisation à $n = 0$:</u> il s'agit de l'hypothèse sur u_0.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \geq 0$ tel que $0 \leq u_n < 1$. On encadre pas à pas $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$:

$$0 \leq u_n < 1 \Rightarrow 0 \leq u_n^2 < 1 \Rightarrow 2 \leq u_n^2 + 1 < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{u_n^2+1}{2} < 1 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} < 1.$$

Conclusion : L'initialisation et l'hérédité sont satisfaites donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 1$.
• On montrer que la suite (u_n) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{u_n^2+1-2u_n}{2} = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0.$$

• La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. On conclut donc que (u_n) converge. Comme sa limite ℓ doit être un point fixe de f, on en déduit que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \ell = 1$.

(ii) **Hypothèse** : $u_0 = 1$.
• On montre par récurrence sur $n \geq 0$ que la suite (u_n) est constante.
Initialisation à $n = 0$: il s'agit de l'hypothèse sur u_0.
Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $u_n = 1$. On calcule alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(1) = 1$.
Conclusion : L'initialisation et l'hérédité sont satisfaites donc $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.
• Toute suite constante converge. Sa limite est $\ell = u_0 = 1$.

(iii) **Hypothèse** : $u_0 \in]1, +\infty[$.
• On sait que la suite (u_n) est croissante. En effet, l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ effectué plus haut reste valable.
• On montre par l'absurde que la suite diverge. (Pas facile à trouver soi-même mais la technique doit être mémorisée pour le final).
démonstration : Supposons que (u_n) converge. On sait alors que la suite converge vers $\ell = 1$ car c'est la seule limite possible. D'après le cours **proposition 3.1.4**, on sait que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell = 1}$.
Or, par hypothèse on a $u_0 > 1$ (supérieur stricte). Ceci est contradictoire avec la phrase encadrée pour $n = 0$.

La phrase "$1 < u_0 \leq 1$" est absurde.

La négation de "(u_n) converge " mène à une absurdité donc la proposition "(u_n) diverge" est vraie.
• On montre par l'absurde que la suite tend vers $+\infty$. (Pas facile à trouver soi-même mais la technique doit être mémorisée pour le final).
démonstration : On suppose que la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$. On prend la négation de

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N \Rightarrow u_n > A). \qquad (\textbf{definition 3.1.2})$$

Cela donne

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n > N \text{ et } u_n \leq A.$$

Comme la suite est croissante, on a $n > N \Rightarrow u_N \leq u_n$ donc la phrase devient

$$\boxed{\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, u_N \leq A.}$$

On peut alors en déduire que (u_n) est majorée.
Or, si (u_n) est majorée et croissante, le cours affirme que (u_n) converge. Ce qui est absurde car (u_n) diverge.
La négation de "(u_n) tend vers $+\infty$ " mène à une absurdité donc la proposition "(u_n) tend vers $+\infty$" est vraie.

Exercice A.2.9 : Soit $f :]0\,,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ avec $a > 0$.
1. Nous n'avons pas besoin d'étudier les variations de f.
Soit $x \neq 0$, on a $f(x) - x = \frac{1}{2}\frac{a-x^2}{x}$.

$$x > \sqrt{a} \Rightarrow x > 0 \text{ et } a - x^2 < 0 \Rightarrow f(x) - x < 0 \Rightarrow f(x) < x\ .$$

On a aussi $f(x) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\frac{x^2-2x\sqrt{a}+a}{x} = \frac{1}{2}\frac{(x-\sqrt{a})^2}{x}$ donc

$$x > \sqrt{a} \Rightarrow (x - \sqrt{a} > 0 \text{ et } x > 0) \Rightarrow f(x) - \sqrt{a} > 0 \Rightarrow f(x) > \sqrt{a}\ .$$

<u>conclusion</u> : Pour tout $x > \sqrt{a}$, on a $\sqrt{a} < f(x) < x$.
2. On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_1 > \sqrt{a} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n)\ .$$

Montrons que (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$.

(i) Montrons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > \sqrt{a}$.
<u>Initialisation</u> : par définition de la suite (u_n), on a $u_1 > \sqrt{a}$.
<u>Hérédité</u> : D'après la question **1.** $u_n > \sqrt{a} \Rightarrow f(u_n) > \sqrt{a} \Rightarrow u_{n+1} > \sqrt{a}$.
<u>Conclusion</u> : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > \sqrt{a}$.

(ii) D'après la question **1.**, puisque $x > \sqrt{a} \Rightarrow f(x) < x$ on a

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0,$$

donc (u_n) est décroissante.

(iii) La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers une limite $\ell = \inf\{u_n,\, n \in \mathbb{N}^*\} \geq \sqrt{a}$. Sachant que $(u_n \underset{n\to\infty}{\to} \ell \Rightarrow u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} \ell)$, on en déduit que ℓ vérifie l'égalité suivante (d'après les opérations sur les limites)

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) \Rightarrow \ell^2 = a \Rightarrow \ell = \sqrt{a}\ .$$

3. On pose $\varepsilon_n = u_n - \sqrt{a}$. Alors

$$\varepsilon_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{a} = f(u_n) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{u_n} = \frac{\varepsilon_n^2}{2u_n}\ .$$

$$u_n > \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{u_n} < \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{\varepsilon_n^2}{2u_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}\ .$$

4. On pose $b = 2\sqrt{a}$. Montrons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n+1} \leq b\left(\frac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^n}$.
<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$ on a $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_1$ et $b\left(\frac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^n} = \varepsilon_1$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\varepsilon_{n+1} \leq b\left(\frac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^n} \Rightarrow \varepsilon_{n+2} \leq \frac{\varepsilon_{n+1}^2}{2\sqrt{a}} \leq \frac{b^2}{2\sqrt{a}}\left[\left(\frac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^n}\right]^2 = b\left(\frac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^n\times 2} = b\left(\frac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^{n+1}}$.
<u>Conclusion</u> : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n+1} \leq b\left(\frac{\varepsilon_1}{b}\right)^{2^n}$.
5. On peut calculer les premiers termes : $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{7}{4}$, $u_3 = \frac{97}{56}$, $u_4 = \frac{18\,817}{10\,864}$ et $u_5 = \frac{708\,156\,977}{408\,855\,776}$.
On a $\frac{\varepsilon_1}{b} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{10}$, donc

$$u_5 - \sqrt{3} = \varepsilon_5 \leq 2\sqrt{3}\frac{1}{10^{2^4}} = \frac{2\sqrt{3}}{10^{16}} \leq 4.10^{-16}.$$

Le nombre rationnel u_5 est une approximation à 16 chiffres après la virgule du nombre irrationnel $\sqrt{3}$.