Exercice A.2.12 - Question 1 : On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{ et } \quad u_n = u_n + \frac{1}{nn!} \; .$$

<u>Indications</u> : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$ et $(n+1)! = (n+1) \times n!$.

(i) Montrons que (v_n) est croissante :

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \; .$$

(ii) Montrons que (u_n) est décroissante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = v_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - (v_n + \frac{1}{nn!}) &= (v_{n+1} - v_n) + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n!} \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \; . \end{aligned}$$

(iii) Montrons que $(u_n - v_n)$ converge vers 0 :

$$u_n - v_n = \frac{1}{nn!} \Rightarrow 0 < u_n - v_n = \frac{1}{nn!} \leq \frac{1}{n} \quad \text{car } n! \geq 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\frac{1}{n} \underset{n \to \infty}{\to} 0 \Rightarrow u_n - v_n \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

<u>Conclusion</u> : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et elles convergent vers la même limite.

Complément : la limite de ces deux suites est le nombre irrationnel $e \approx 2.718\ldots$ dont vous verrez une justification au chapitre 6.

Exercice A.2.13 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose $0 < b < a$ (donc $(a-b) > 0$).
On considère les suites définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et les relations de récurrences

$$u_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{bu_n + av_n}{a+b}.$$

(i) On commence par étudier la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$:
Montrer que (w_n) est une suite géométrique, càd $\exists\, 0 < q < 1,\ w_{n+1} = qw_n$.
En déduire l'expression de w_n en fonction de n et w_0 et sa limite quand $n \to +\infty$.
Puis justifier que les termes de la suite (w_n) sont soit « tous positifs » soit « tous négatifs ».

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b} - \frac{bu_n + av_n}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}(u_n - v_n)\ .$$

La suite $(u_n - v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{a-b}{a+b}$ donc $u_n - v_n = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n (u_0 - v_0)$.
D'après les hypothèses sur a et b, on a

$$0 < b < a \Rightarrow 0 < a - b < a + b \Rightarrow 0 < \tfrac{a-b}{a+b} < 1 \Rightarrow u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

Comme la raison est strictement positive, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $w_n = u_n - v_n$ est constant et égal au signe du premier terme $w_0 = u_0 - v_0$.

(ii) Montrer que l'une des suites est croissante et l'autre décroissante : on peut seulement montrer que les quantités $(u_{n+1} - u_n)$ et $(v_{n+1} - v_n)$ sont de signe constant et contraire.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{au_n + bv_n}{a+b} - u_n = \frac{-bu_n + bv_n}{a+b} = -\frac{b}{a+b}(u_n - v_n).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ garde un signe constant et est égal au signe opposé de $u_0 - v_0$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{bu_n + av_n}{a+b} - v_n = \frac{bu_n - bv_n}{a+b} = \frac{b}{a+b}(u_n - v_n).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n$ garde un signe constant et est égal au signe de $u_0 - v_0$.
<u>conclusion</u> : L'une des suites est croissante, l'autre décroissante et $v_n - u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ donc (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

(iii) Pour déterminer leur limite commune ℓ on s'intéresse à la suite $s_n = u_n + v_n$.
Montrer que (s_n) est une suite constante.
En déduire la limite commune de (v_n) et (u_n) en fonction de u_0 et v_0. On a

$$w_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{au_n + bv_n}{a+b} + \frac{bu_n + av_n}{a+b} = \frac{(a+b)u_n + (b+a)v_n}{a+b} = u_n + v_n\ .$$

La suite (w_n) est contante donc sa limite est $u_0 + v_0$.
D'après les opérations sur les limites, en posant $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = 2\ell = u_0 + v_0.$$

Donc $\ell = \frac{u_0+v_0}{2}$.

Exercice A.2.17 Dans cet trois questions, on cherche un équivalent au terme général de chaque série sous la forme $\dfrac{\lambda}{n^\alpha}$ et on conclut.

(i) Le terme général est équivalent à $\frac{(2n)^4}{(3n^2)^3} = \frac{16n^4}{27n^6} = \frac{16}{27n^2}$. La série est convergente.

(ii) Ici, il faut observer que $0 < \cos^2 n \leq 1$ donc $u_n \geq \frac{1}{n}$. Comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ aussi.

(iii) Mettre au meme dénomiteur et appliquer la méthode du conjugué :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \times \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n} \times \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

La série est convergente.

(iv) On montrer que le terme général $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ est équivelent à $v_n = \frac{1}{n}$:

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = e^{-\frac{\ln n}{n}}.$$

Avec les échelles de comparaison à l'infini, on sait que $\frac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc par composition $e^{-\frac{\ln n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} e^0 = 1$.
Comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ aussi.

(v) On utilise la limite connue $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on en déduit par composition de limite que $\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, donc $\sin(\frac{1}{n})$ est équivalent à $\frac{1}{n}$. Le terme général est équivalent à $\frac{1}{n^2}$.
La série est convergente.

Exercice A.2.9 du chapitre 2 : Dans cet exercice on utilise quelques outils du chapitre 3

1. On étudie l'ensemble $A := \{1 + \frac{(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$.
On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Pour déterminer l'existence de minorants/majorants, de plus grand élément/plus petit élément, borne inf/borne sup, il faut essayer d'ordonner les termes de la suites.

La présence de $(-1)^n$ dans la définition de u_n nous incite à travailler avec les suites extraites : $u_{2k} = 1 + \frac{(-1)^{2k}}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ et $u_{2k+1} = 1 + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1}$. La suite (u_{2k}) est définie pour $k \geq 1$ et la suite (u_{2k+1}) est définie pour $k \geq 0$.

Comme la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est décroissante, il en va de même des suites de terme général $\frac{1}{2k}$ et $\frac{1}{2k+1}$. La suite $(u_{2k})_{k\geq 1}$ est donc décroissante et la suite $(u_{2k+1})_{k\geq 0}$ est croissante car la multiplication par -1 change le sens de variation. On résume cela par ces enchaînements d'inégalités

$$\cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$u_1 = 0 \leq u_3 = \frac{2}{3} \leq \cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots$$

Ce qui est intéressant est qu'on a

$$u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \geq 1 \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1} \leq 1$$

Donc on peut concaténer les inégalités successives comme suit

$$u_1 = 0 \leq u_3 = \frac{2}{3} \leq \cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots \leq 1 \leq \cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

On conclut que l'ensemble A admet un plus petit élément $\min A = u_1 = 0$ et un plus grand élément $\max A = u_2 = \frac{3}{2}$.
On sait aussi que lorsque $\min A$ et $\max A$ existent alors $\inf A = \min A$ et $\sup A = \max A$ existent aussi.

2. On étudie l'ensemble $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

On procède de la même façon. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = (-1) + \frac{1}{n}$.

La présence de $(-1)^n$ dans la définition de u_n nous incite à travailler avec les suites extraites : $u_{2k} = (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$ et $u_{2k+1} = (-1)^{2k+1} + \frac{1}{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1}$. La suite (u_{2k}) est définie pour $k \geq 1$ et la suite (u_{2k+1}) est définie pour $k \geq 0$.

La suite $(u_{2k})_{k\geq 1}$ est donc décroissante et la suite $(u_{2k+1})_{k\geq 0}$ est décroissante également. On résume cela par ces enchaînements d'inégalités

$$\cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots \leq u_3 = -\frac{2}{3} \leq u_1 = 0$$

Ce qui est intéressant est qu'on a

$$u_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \geq 1 \qquad \text{et} \qquad u_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} \leq 0$$

Donc on peut concaténer les inégalités successives comme suit

$$\cdots \leq u_{2k+1} \leq \cdots \leq u_3 = -\frac{2}{3} \leq u_1 = 0 \leq 1 \leq \cdots \leq u_{2k} \leq \cdots \leq u_4 = \frac{5}{4} = 1.25 \leq u_2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

On conclut que l'ensemble B admet un plus grand élément $\max B = u_2 = \frac{3}{2}$. On sait aussi que lorsque $\max B$ existe alors $\sup B = \max B$ existe aussi.

Pour la borne inf, c'est plus compliqué. On commence par justifier qu'elle existe :

$$n > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} > 0 \quad \Rightarrow \quad u_n \geq (-1)^n \geq -1\ .$$

L'ensemble B est minoré par -1 c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car $u_1 = 0 \in B$). d'après l'axiome de la borne inférieure $\inf B$ existe. Il faut avoir l'intuition que $\inf B = -1$ en étudiant les limites des suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}).

<u>Montrons que $\inf B = -1$</u> : pour ce faire il faut démontrer les deux caractérisations de la borne inférieure.

$$\begin{cases} 1)\ \forall x \in B,\ -1 \leq x \\ 2)\ \forall t > -1,\ \exists x \in B,\ x < t\ . \end{cases}$$

La première caractérisation 1) est déjà justifiée plus haut. Il reste à prouver la seconde.

<u>démonstration</u> : Soit $t > -1$. On cherche $x = u_n$ tel que $x < t$.
Si $t > 0$, il suffit de choisir $x = u_1 = 0 < t$.
Si $-1 < t \leq 0$. On utilise la définition avec quantificateurs de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell = -1$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, (n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Pour $\varepsilon = t - (\ell) > 0$. On pose $x = u_{N+1}$. Ainsi $|u_{N+1} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow t = \ell + \varepsilon > x = u_{N+1}$.

Exercice A.2.11 Suite récurrente

Avec $a = 1$

On considère la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1-x^2}{2}$.

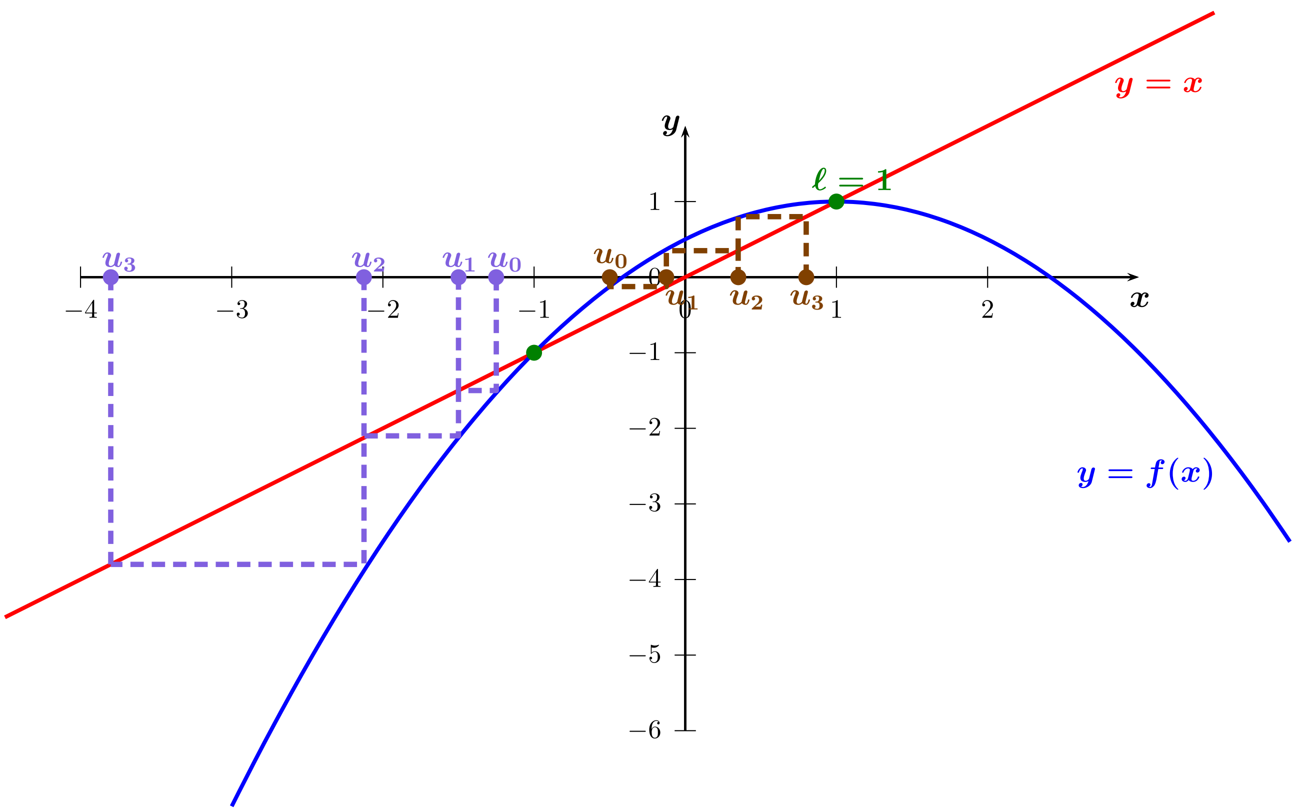
1. On déduit les variations de f à partir de la forme canonique : $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$.
Dans ce cas, f est croissante sur $]-\infty, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
Ensuite, pour la recherche de point de fixe et l'étude de signe, on factorise

$$g(x) = f(x) - x = \frac{1}{2}(1-x)(1+x).$$

La fonction f admet deux points fixes $f(1) = 1$ et $f(-1) = -1$. On dresse le tableau de signe de g :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. On représente quelques suites graphiquement en choisissant u_0 de part et d'autre des points fixes.



On conjecture :

- Si $u_0 \in]-\infty, -1[$, alors (u_n) est décroissante et tend vers $-\infty$.
- Si $u_0 = -1$ alors (u_n) est constante égale à -1 donc convergente.

• Si $u_0 \in]-1,1]$, alors (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle converge vers 1.
• Si $u_0 \in]1,3[$, alors $u_1 \in]-1,1[$ et $(u_n)_n \geq 1$ est converge vers 1.
• Si $u_0 = 3$ alors $u_1 = f(u_0) = -1$ et $(u_n)_n \geq 1$ est constante égale à -1.
• Si $u_0 \in]3,+\infty[$, alors $u_1 \in]-\infty,-1[$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers $-\infty$.

3. On démontre les résultats dans les cas $u_0 \in]-1,1]$ et $u_0 < -1$.
<u>Cas $u_0 \in]-1,1]$:</u> • On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 < u_n \leq 1$.
Initialisation à $n = 0$: l'assertion est vraie pour $n = 0$ par hypothèse sur u_0.
Hérédité : On suppose que $u_n \in]-1,1]$ on montre que $u_{n+1} \in]-1,1]$. Pour ce faire, on utilise la forme canonique :

$$-1 < u_n \leq 1 \Rightarrow -2 < u_n - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (u_n-1)^2 < 4 \Rightarrow -2 < -\frac{1}{2}(u_n-1)^2 \leq 0 \Rightarrow -1 < u_{n+1} = f(u_n) \leq 1.$$

• D'après le tableau de signe de g, on en déduit que (u_n) est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0 \text{ car } u_n \in]-1,1].$$

• Conclusion : toute suite croissante et majorée converge. En ce qui concerne la limite ℓ on sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell$. Donc $\ell \geq u_0 > -1$. La seule limite possible est $\ell = 1$.

<u>Cas $u_0 < -1$:</u>
• On montre par récurrence que $\forall n \geq 0,\ u_n < -1$.
• On sait que la suite (u_n) est décroissante. En effet, l'étude du signe de g indique que $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$.
• On montre par l'absurde que la suite diverge. (Pas facile à trouver soi-même mais la technique doit être mémorisée pour le final).
<u>démonstration</u> : Supposons que (u_n) converge. On sait alors que la suite converge vers $\ell = \pm 1$ car ce sont les seules limites possibles. D'après le cours **proposition 3.1.4**, on sait que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell = \pm 1}$.
Or, par hypothèse on a $u_0 < -1$ (inférieur stricte). Ceci est en contradiction avec la phrase encadrée pour $n = 0$.

La phrase "$\pm 1 \leq u_0 < -1$" est absurde.

La négation de "(u_n) converge " mène à une absurdité donc la proposition "(u_n) diverge" est vraie.
• On montre par l'absurde que la suite tend vers $-\infty$. (Pas facile à trouver soi-même mais la technique doit être mémorisée pour le final).
<u>démonstration</u> : On suppose que la suite (u_n) ne tend pas vers $-\infty$. On prend la négation de

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N \Rightarrow u_n < A). \qquad (\textbf{definition 3.1.2})$$

Cela donne

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > N \text{ et } u_n \geq A.$$

Comme la suite est décroissante, on a $n > N \Rightarrow u_N \geq u_n$ donc la phrase devient

$$\boxed{\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, u_N \geq A.}$$

On peut alors en déduire que <u>(u_n) est minorée</u>.
Or, si (u_n) est minorée et décroissante, le cours affirme que (u_n) converge. Ce qui est absurde car (u_n) diverge.
La négation de "(u_n) tend vers $-\infty$ " mène à une absurdité donc la proposition "(u_n) tend vers $-\infty$" est vraie.