

Exercice A.2.16 Convergence absolue

Pour mieux comprendre, considérons la suite de premiers termes :

$$u_0 = -1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = -5, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = -\frac{7}{2}, \quad \dots$$

La définition des termes généraux v_n et w_n donne :

$$v_0 = 0, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = \frac{1}{2}, \quad v_3 = 0, \quad v_4 = 3, \quad v_5 = 0, \quad \dots$$

$$w_0 = -1, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = -5, \quad w_4 = 0, \quad w_5 = -\frac{7}{2}, \quad \dots$$

On remarque alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$, $w_n \leq 0$ et $u_n = v_n + w_n$.

1.

$$S_{n+1}^+ - S_n^+ = v_{n+1} = \max(u_{n+1}, 0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (S_n^+) \text{ est croissante}$$

$$S_{n+1}^- - S_n^- = w_{n+1} = \min(u_{n+1}, 0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (S_n^-) \text{ est décroissante}$$

2. Comme $S_n = S_n^+ + S_n^-$, on montre que (S_n^+) et (S_n^-) sont convergentes. Comme elles sont monotones, il reste à justifier que (S_n^+) est majorée et (S_n^-) est minorée.

Par hypothèse $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge vers une limite ℓ . Comme il s'agit d'une suite croissante, on a

$$\forall n \geq 0, \quad \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \ell.$$

$$v_n = \max(u_n, 0) \leq |u_n| \Rightarrow \quad S_n^+ \leq \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \ell$$

$$v_n = \min(u_n, 0) \geq -|u_n| \Rightarrow \quad S_n^- \geq -\sum_{k=0}^n |u_k| \geq -\ell$$

3. Pour montrer que (S_n) converge, il suffit de montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles convergent alors vers la même limite ℓ et (S_n) aussi.

(a) (S_{2n}) est décroissante

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} < 0.$$

(b) (S_{2n+1}) est croissante

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} > 0.$$

(c) $S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Cependant, d'après les règles de Riemann avec $\alpha = 1$, la série $\sum_{k=1}^n |u_k| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ diverge.