

### Chapitre 5. Exercice A.2.5

On utilise la définition d'une fonction  $f$  dérivable en un point  $a \in \mathcal{D}_f$  : la limite du taux d'accroissements existe.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) .$$

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0) = 1$  car  $\exp$  est dérivable en 0 et  $\exp'(x) = e^x$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \ln'(1) = 1$  car  $\ln$  est dérivable en 1 et  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \ln'(1) = 1$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin(\frac{\pi}{3})}{\cos x - \cos(\frac{\pi}{3})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sin(\frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} \frac{x - \frac{\pi}{3}}{\cos x - \cos(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sin'(\frac{\pi}{3})}{\cos'(\frac{\pi}{3})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{-\sin(\frac{\pi}{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  car  $\sin$  et  $\cos$  sont dérivables en  $\frac{\pi}{3}$  et  $\cos'(\frac{\pi}{3}) \neq 0$ .

5. On pose  $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{3})}{-2(\cos x - \cos(\frac{\pi}{3}))} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} -\frac{1}{2} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} \frac{x - \frac{\pi}{3}}{\cos x - \cos(\frac{\pi}{3})} = -\frac{1}{2} \frac{f'(\frac{\pi}{3})}{\cos'(\frac{\pi}{3})} = -\frac{1}{2} \frac{\cos(0)}{-\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
 car  $f$  et  $\cos$  sont dérivables en  $\frac{\pi}{3}$  et  $f'(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^0) - (e^{-x} - e^0)}{\sin x - \sin 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{\sin x - \sin 0} - \frac{e^{-x} - e^0}{\sin x - \sin 0} = \frac{e^0}{\cos(0)} - \frac{-e^0}{\cos(0)} = 2$  car  $\exp$  et  $\sin$  sont dérivables en 0 et  $\sin'(0) \neq 0$ .

**Exercice hors poly.** Préciser le domaine de dérivabilité des fonctions  $f$  suivantes et calculer leur dérivées  $f'(x)$ .

$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} f(x) = \frac{-2x^2 + 4x}{x^2 + x + 1} & \textcircled{3} f(x) = (1-x)^3 \sqrt{1+x} & \textcircled{5} f(x) = e^{\sqrt{1+x^2}} \\ \textcircled{2} f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x+1} & \textcircled{4} f(x) = \frac{2}{(3x+5)^3} & \textcircled{6} f(x) = \ln \sqrt{1-x^2} \end{array}$$

Puis, remplir le formulaire ci-dessous :

|         |            |               |             |              |            |                      |
|---------|------------|---------------|-------------|--------------|------------|----------------------|
| $f(x)$  | $e^{u(x)}$ | $\sqrt{u(x)}$ | $\ln(u(x))$ | $\ln  u(x) $ | $(u(x))^n$ | $\frac{1}{(u(x))^n}$ |
| $f'(x)$ |            |               |             |              |            |                      |

---

|         |                         |                              |                      |                      |                                      |                                        |
|---------|-------------------------|------------------------------|----------------------|----------------------|--------------------------------------|----------------------------------------|
| $f(x)$  | $e^{u(x)}$              | $\sqrt{u(x)}$                | $\ln(u(x))$          | $\ln  u(x) $         | $(u(x))^n$                           | $\frac{1}{(u(x))^n}$                   |
| $f'(x)$ | $u'(x) \times e^{u(x)}$ | $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ | $\frac{u'(x)}{u(x)}$ | $\frac{u'(x)}{u(x)}$ | $n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$ | $-n \times \frac{u'(x)}{(u(x))^{n+1}}$ |

①  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  car  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$  et

$$f'(x) = \frac{-6x^2 - 4x + 4}{(x^2 + x + 1)^2}$$

②  $f$  est définie et dérivable sur  $] -\frac{3}{2}, +\infty[ \setminus \{-1\}$  et

$$f'(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2 \sqrt{2x+3}}.$$

③  $f$  est définie et dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et

$$f'(x) = -3(1-x)^2 \sqrt{1+x} + (1-x)^3 \times \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = -\frac{(1-x)^2}{2\sqrt{1+x}}(5+7x).$$

④  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$  et

$$f'(x) = -\frac{18}{(3x+5)^4}$$

⑤  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\sqrt{1+x^2}}$$

⑥  $f$  est définie et dérivable sur  $] -1, 1[$  et

$$f'(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$