Chapitre 5. Exercice A.2.1-question 1 Application de la formule de dérivation

$$(g\circ f)'(x) = f'(x)\times g'(f(x)).$$

• $g\circ f(x) = \ln|\tan\frac{x}{2}|$ sur $]-\pi,\pi[\backslash\{0\}$.
On pose $\forall\, t\in\mathbb{R}^*,\ g(t)=\ln|t|$, puis $\forall\, x\in]-\pi,\pi[,\ f(x)=\tan\frac{x}{2}$

$$g'(t) = \begin{cases} \frac{-1}{-t} = \frac{1}{t} & \text{si } t<0 \\ \frac{1}{t} & \text{si } t>0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\tan'(\frac{x}{2})$$

$$\tan'(\theta) = \frac{\cos\theta\times\cos\theta - (-\sin\theta)\times\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Finalement,

$$(g\circ f)'(x) = f'(x)\times g'(f(x)) = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\times\frac{1}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

• $g\circ f(x) = \cos^2(3\sin(4x))$ sur $\mathbb{R}$.
On pose $\forall\, t\in\mathbb{R},\ g(t)=\cos^2 t$ et $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)=3\sin(4x)$.

$$g'(t) = -2\sin t\cos t = -\sin(2t) \text{ et } f'(x) = 12\cos(4x).$$

On obtient

$$(g\circ f)'(x) = f'(x)\times g'(f(x)) = 12\cos(4x)\times(-\sin(6\sin(4x)) = -12\cos(4x)\sin(6\sin(4x)).$$

Chapitre 5. Exercice hors poly
On définit les trois fonctions f_1, f_2 et f_3 sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} x^4 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On admet que ces trois fonctions sont continues car il s'agit de prolongements par continuité. Pour chacune des fonctions ci-dessus :
1. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ et $f'(0)$.

2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $f''(x)$ pour $x \neq 0$.

4. Est-ce que $f''(0)$ existe ?

5. Est-ce que f est de classe $\mathscr{C}^2$?

Correction.

Étude de la fonction f_1

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_1'(x) = 2x\ln|x| + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln|x| + x$ et $f_1'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x\ln|x| = 0$.
2. Par somme/produit/composition de fonctions usuelles, la fonction dérivée f_1' est continue sur $\mathbb{R}^*$. En $a = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f_1'(x) = 0 = f_1'(0)$ donc f_1' est aussi continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. On dit que f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_1''(x) = 2\ln|x| + 2x \times \frac{1}{x} + 1 = 2\ln|x| + 3$.
Cette expression est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On peut dire que f_1 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$
4. On étudie la limite du taux d'accroissement pour la fonction dérivée f_1' :

$$\frac{f_1'(x) - f_1'(0)}{x - 0} = \frac{2x\ln|x| + x}{x} = 2\ln|x| + 1 \underset{x\to 0}{\to} -\infty.$$

La limite n'existe pas donc $f_1''(0)$ n'existe pas. On ne peut pas étudier la continuité de f_1'' en $a = 0$. La fonction f_1 n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Étude de la fonction f_2

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_2'(x) = 4x^3\sin(\frac{1}{x}) + x^4 \times (-\frac{1}{x^2})\cos(\frac{1}{x}) = 4x^3\sin(\frac{1}{x}) - x^2\cos(\frac{1}{x})$
et $f_2'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x^3\sin(\frac{1}{x}) = 0$.
2. Par somme/produit/composition de fonctions usuelles, la fonction dérivée f_2' est continue sur $\mathbb{R}^*$. En $a = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f_2'(x) = 0 = f_2'(0)$ donc f_2' est aussi continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. On dit que f_2 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_2''(x) = 12x^2\sin(\frac{1}{x}) - 6x\cos(\frac{1}{x}) - \sin(\frac{1}{x})$.
Cette expression est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On peut dire que f_2 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$
4. On étudie la limite du taux d'accroissement pour la fonction dérivée f_2' :

$$\frac{f_2'(x) - f_2'(0)}{x - 0} = \frac{4x^3\sin(\frac{1}{x}) - x^2\cos(\frac{1}{x})}{x} = 4x^2\sin(\tfrac{1}{x}) - x\cos(\tfrac{1}{x}) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

La limite existe donc $f_2''(0) = 0$.
5. Comme $\sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0, la fonction dérivée $f_2''(x)$ n'admet pas de limite en 0 donc n'est pas continue en 0. La fonction f_2 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Étude de la fonction } f_3}$ On démontre (sans DL) tout d'abord que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.
D'après la règle de composition de limite, on peut remplacer x par $2x$ et on a

$$\boxed{\ell = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-\sin(2x)}{(2x)^3}.$$

Or, $\frac{2x-\sin(2x)}{(2x)^3} = \frac{x-\cos x \sin x}{4x^3}$ donc $\boxed{4\ell = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\cos x\sin x}{x^3}}$. On étudie la différence

$$4\ell - \ell = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ell = \frac{1}{6}$$

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_3'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x - 1}{x} + \frac{x-\sin x}{x^2}$ et $f_3'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \ell \times 0 = 0.$
2. Par somme/produit/composition de fonctions usuelles, la fonction dérivée f_3' est continue sur $\mathbb{R}^*$.

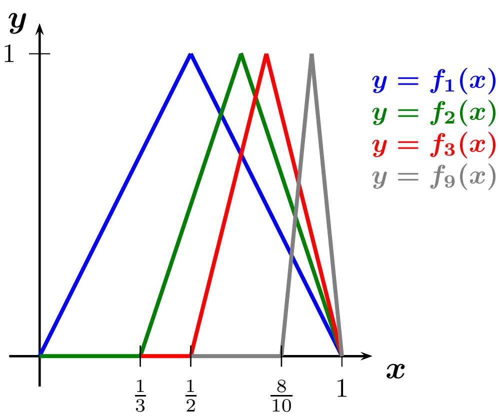
$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - 1}{x^2} \times x \underset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2} \times 0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sin x - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

En $a = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f_3'(x) = 0 = f_3'(0)$ donc f_3' est aussi continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. On dit que f_3 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_3''(x) = -\frac{\sin x}{x} - \frac{2(x\cos x - \sin x)}{x^3} = -\frac{\sin x}{x} - \frac{2(\cos x - 1)}{x^2} + \frac{2(\sin x - x)}{x^3}$.
Cette expression est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On peut dire que f_3 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$
4. On étudie la limite du taux d'accroissement pour la fonction dérivée f_2' :

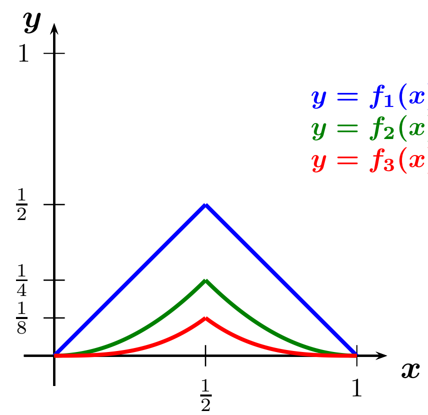
$$\frac{f_3'(x) - f_3'(0)}{x-0} = \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{x - \sin x}{x^3} \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}.$$

La limite existe donc $f_3''(0) = -\frac{1}{3}$.
5. On calcule $\lim\limits_{x\to 0} f_3''(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(- -\frac{\sin x}{x} - \frac{2(\cos x - 1)}{x^2} + \frac{2(\sin x - x)}{x^3}\right) = -1 - (-1) + 2 \times (-\frac{1}{6}) = -\frac{1}{3} = f_3''(0)$. La fonction f_3'' est aussi continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. On dit que f_3 est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 4 - Exercice A.2.17



(i)



(ii)

2. • Dans le cas (i), on montre que pour x$\in [0,1]$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ f_n(x) = 0$:

$$\text{on résout } x \leq \frac{n-1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)x \leq n-1 \quad \Leftrightarrow \quad 1+x \leq n - nx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+x}{1-x} \leq n$$

On propose $N = E(\frac{x+1}{1-x}) + 1$.
Cela montre qu'à partir du rang N, la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 0 et donc converge vers 0.
La suite (f_n) converge simplement sur $D = [0,1]$ vers la fonction identiquement nulle.

• Dans le cas (ii), on voit bien que les courbes représentatives des fonctions f_n convergent vers l'axe des abscisses. On décompose les fonctions f_n comme suit

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (1-x)^n & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Les résultats sur les suites géométriques entrainent

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 1-x \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (1-x)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

La suite (f_n) converge simplement sur $D = [0,1]$ vers la fonction identiquement nulle.

3. On pose $(u_n) = \sup\{|f_n(x)|;\ x \in D\}$.
• Pour (i) on voit graphiquement, qu'il n'y a pas convergence uniforme. Ici, on voit graphiquement, que $u_n = f(\frac{n}{n+1}) = 1$. La suite $\big(u_n\big)$ est constante égale à 1 donc ne converge pas vers 0.

• Pour (ii) on voit graphiquement qu'il y a convergence uniforme.
Ici, $u_n = f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Chapitre 5 - Exercice A.2.25. Convergence uniforme de suites de fonctions

1. $f_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$.
$f_n(1) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(1) = 0$.
Pour $x \in]0, 1[$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

2. Tout d'abord, on remarque que $\forall\, x \in [0, 1],\ f_n(x) \leq 0$ donc $|f_n(x)| = -f_n(x)$.
Pour $x \in]0, 1[$, on calcule $f_n'(x) = (nx^{n-1} \ln x + x^n \times \frac{1}{x}) = x^{n-1}(n \ln x + 1)$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		1
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{ne}$	$\nearrow$	0
$\lvert f_n(x) \rvert$	0	$\nearrow$	$u_n = \frac{1}{ne}$	$\searrow$	0

3. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [0, 1],\ |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$ avec $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et $f(x) = 0$.
La convergence de (f_n) vers f est donc uniforme sur $D = [0, 1]$.

Chapitre 5 - Exercice A.2.26. Convergence non uniforme de suites de fonctions

1. On sait que $te^{-t} = \frac{t}{e^t} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$.

Pour $x \in]0, +\infty[$ fixé, on a par composition de limites $nxe^{-nx} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \frac{0}{1-e^{-x}} = 0$.

2. D'après **1.** on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = 0$.

Pour $n \geq 1$ fixé, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{1-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{1}{\frac{e^{-x}-1}{x}} = -\frac{1}{-1} = 1$. D'où

$$\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to 0^+} f_n(x) \right) = +\infty.$$

3. Pour toutes suites de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f, on peut intervertir les limites entre les variables n et x.

Par conséquent, (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction identiquement nulle.

4. On propose une suite $(x_n) \subset D$, telle que $(|f_n(x_n)|)$ ne converge pas vers 0.

Prenons $x_n = \frac{1}{n} \in D$. Alors, $f(\frac{1}{n}) = \frac{e^{-1}}{1-e^{-\frac{1}{n}}} \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq |f_n(x_n)|$, on en déduit que la suite (u_n) ne converge pas vers 0 non plus. La convergence n'est pas uniforme.