

**Chapitre 5. Exercice A.2.6**

3. On pose  $f(x) = x^3$  et  $g(x) = e^x$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont au moins 5 fois dérivables. La formule de Leibniz est

$$(fg)^{(5)}(x) = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} f^{(5-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

- On note d'avance que  $f^{(4)}$  et  $f^{(5)}$  sont nulles et  $\forall k \in \mathbb{N}, g^{(k)}(x) = e^x$ .
- Triangle de Pascal jusque  $n = 5$  :

1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$$(fg)^{(5)}(x) = 1 \times (x^3)e^x + 5 \times (3x^2)e^x + 10 \times (6x)e^x + 10 \times (6)e^x + 0 + 0 = e^x(x^3 + 15x^2 + 60x + 60).$$

4. • Calcul de la dérivée  $n$ -ième de  $(x^2 + 1)e^x$  :

On pose  $f(x) = e^x$  et  $g(x) = x^2 + 1$ . On sait que la dérivée 3ème de  $g$  s'annule et  $f^{(k)}(x) = e^x$  donc

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x) = \binom{n}{0} f^{(n)}(x)g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x)g'(x) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x)g''(x) + \mathbf{0} \dots \\ &= e^x(x^2 + 1) + ne^x(2x) + \frac{n(n-1)}{2}e^x \times 2 \\ &= e^x(x^2 + 2nx + n(n-1) + 1) \end{aligned}$$

• Calcul de la dérivée  $n$ -ième de  $x^2(x+1)^n$  :

On pose  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = (x+1)^n$ . On sait que la dérivée 3ème de  $f$  s'annule et  $g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}$  donc

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) = \binom{n}{0} f(x)g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x)g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} f^{(2)}(x)g^{(n-2)}(x) + \mathbf{0} \dots \\ &= x^2 \times \frac{n!}{0!} + n \times 2x \times \frac{n!}{1!}(x+1) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times \frac{n!}{2!}(x+1)^2 \\ &= n!(x^2 + 2nx(x+1) + \frac{n(n-1)}{2}(x+1)^2) \end{aligned}$$

**Chapitre 5. Exercice hors poly.** Fonction convexe, fonction concave

Soient  $f$  et  $g$  deux fonction définies sur  $]0, +\infty[$  par

$$f(x) = e^x - \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(\ln(1+x)) - x^2.$$

1. Montrer que les fonctions  $f'$  et  $g'$  s'annulent au moins une fois dans l'intervalle  $]\frac{1}{2}, 1[$ .

(Indication : appliquer le TVI à  $f'$  et  $g'$ .)

2. Calculer  $f''(x)$  et  $g''(x)$ .

3. Sans dresser le tableau de variation, justifier l'existence d'un extremum global pour les fonctions  $f$  et  $g$ . Puis préciser leur nature.

**Correction. 1.** Les fonctions  $f$  et  $g$  sont au moins de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  par somme et composition de fonctions usuelles (polynômes, exp et ln).

On calcule les dérivées premières :

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)} - 2x.$$

• On a  $f'(1) = e - 1 > 0$  et  $f'(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - 2 < 0$  (car  $e < 4$ ). D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\exists c_1 \in ]\frac{1}{2}, 1[$ ,  $f'(c_1) = 0$ .

• On a  $g'(1) = \frac{1}{2\ln(2)} - 2 < 0$  car  $\ln(2) > \ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$  donc  $\frac{1}{\ln(2)} < 2$

et  $g'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{3}{2}\ln(\frac{3}{2})} - 1 > \frac{1}{2\ln(\frac{3}{2})} - \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{\ln(\frac{9}{4})} - \frac{1}{\ln e} > 0$  car  $\frac{9}{4} < e$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\exists c_2 \in ]\frac{1}{2}, 1[$ ,  $g'(c_2) = 0$ .

2. À finir.

### Chapitre 5. Exercice A.2.14

2. On pose  $\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x)$ . On remarque que le résultat voulu est équivalent à obtenir  $\phi'(c) = 0$  car  $g'$  ne s'annule pas sur  $]a; b[$ . On applique le théorème de Rolle à la fonction  $\phi$ .

- La fonction  $\phi$  est continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$  car  $f$  et  $g$  le sont.
- Il reste à montrer que  $\phi(a) = \phi(b)$ .

$$\phi(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(a) = \frac{f(a)(g(b) - g(a)) - g(a)(f(b) - f(a))}{g(b) - g(a)} = \frac{f(a)g(b) - g(a)f(b)}{g(b) - g(a)}$$

$$\phi(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(b) = \frac{f(b)(g(b) - g(a)) - g(b)(f(b) - f(a))}{g(b) - g(a)} = \frac{-f(b)g(a) + g(b)f(a)}{g(b) - g(a)} = \phi(a)$$

On en déduit qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que  $\phi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ .

### Chapitre 5. Exercice A.2.16

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| < q < 1. \end{cases}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On doit montrer que la suite récurrente définie comme suit

$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

converge vers 0.

**Remarque :**  $u_1 = f(u_0) = f(x) = f^1(x)$   
 $u_2 = f(u_1) = f(f(x)) = f \circ f(x) = f^2(x)$   
 $u_3 = f(u_2) = f(f \circ f(x)) = f \circ f \circ f(x) = f^3(x)$   
 $\vdots$   
 $u_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f(x)}_{n \text{ fois}} = f^n(x)$

Enoncé supplémentaire : montrer ensuite que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.

**Démonstration de  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  :**

(i) Étape 1 : Montrons que  $f$  est lipschitzienne de rapport  $0 < q < 1$ .

On applique l'égalité des accroissements finis pour  $f$  entre  $x \in \mathbb{R}$  et  $x' \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq x'$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $[x, x']$  (ou  $[x', x]$ ) et dérivable sur  $]x, x'[$  (ou  $]x', x[$ ). D'après le T.A.F. on sait qu'il existe  $c \in ]x, x'[$  ou  $(c \in ]x', x[)$  tel que

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= f'(c)(x' - x) \\ \Rightarrow |f(x') - f(x)| &= |f'(c)||x' - x| \\ &\underset{|f'(c)| < q}{\Rightarrow} |f(x') - f(x)| \leq q|x' - x| \end{aligned}$$

Cette inégalité est bien entendu satisfaite dans le cas  $x = x'$ . On a donc

$$\boxed{\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, |f(x') - f(x)| \leq q|x' - x|}$$

On en déduit que  $f$  est contractante et admet un unique point fixe  $\ell = 0$ .

(ii) Étape 2 : 0 est un point fixe de  $f$ , autrement dit  $f(0) = 0$ . On pose  $x' = 0$  et  $x = u_n$  pour obtenir

$$|f(0) - f(u_n)| \leq q|0 - u_n| \Leftrightarrow \boxed{|f(u_n)| = |u_{n+1}| \leq q|u_n|}$$

(iii) Étape 3 : on montre par récurrence que

$$\forall n \geq 0, |u_n| \leq q^n |u_0|$$

Initialisation à  $n = 0$  :  $|u_0| = q^0 |u_0|$ , l'égalité entraîne l'inégalité

Hérédité : on pose  $H(n) := \ll |u_n| \leq q^n |u_0| \gg$ . On doit montrer que  $H(n) \Rightarrow H(n+1)$ .

On a,

$$u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow |u_{n+1}| = |f(u_n)| \underset{\text{Étape 2}}{\Rightarrow} |u_{n+1}| \leq q|u_n|$$

$$\text{Par hyp. de réc. H}(n) \Rightarrow |u_{n+1}| \leq q \times q^n |u_0| = q^{n+1} |u_0|.$$

L'hérédité est démontrée.

Conclusion La suite  $(q^n |u_0|)$  est une suite géométrique de raison  $0 < q < 1$ . Donc elle converge vers 0. D'après le corollaire 1 du théorème des gendarmes, on en déduit que  $(u_n)$  converge vers 0 également.

Pour l'énoncé supplémentaire, on utilise l'ex A.2.16 du chap.3 :

$$\left( \sum_{k=0}^n |u_k| \right) \text{ converge} \Rightarrow \left( \sum_{k=0}^n u_k \right) \text{ converge}$$

Montrons que  $\left( \sum_{k=0}^n |u_k| \right)$  converge (on parle de convergence absolue).

Tout d'abord, toute série de terme positifs est croissante.

$$0 \leq |u_n| \leq q^n |u_0| \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \sum_{k=0}^n q^k |u_0|$$

La série géométrique est croissante et convergente donc majorée par sa limite  $\frac{|u_0|}{1-q}$ . Par conséquent

$\left( \sum_{k=0}^n |u_k| \right)$  est croissante et majorée par  $\frac{|u_0|}{1-q}$  donc converge.

### Chapitre 5. Exercice A.2.18 - question 3

On sait que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge et que  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge. Montrons que  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$  diverge.

3. Reprendre à l'identique les questions 1 et 2 en remplaçant la fonction  $t \mapsto \ln t$  par la fonction  $t \mapsto \ln(\ln t)$ .

(i) Montrer que si  $1 < x < y$ , alors  $\ln(\ln y) - \ln(\ln x) < \frac{y-x}{x \ln x}$

(ii) En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , avec  $k \geq 2$ , on a  $\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \frac{1}{k \ln k}$

(iii) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$  diverge vers  $+\infty$ .

#### Correction.

(i) Soit  $1 < x < y$ . On applique l'égalité des accroissements finis à la fonction  $f = \ln \circ \ln$  sur  $[x, y]$ . Par composition, la fonction  $\ln$  est continue sur  $[x; y]$  et dérivable sur  $]x; y[$  donc  $\exists c \in ]x; y[$ ,  $\ln(\ln y) - \ln(\ln x) = f'(c)(y - x)$ .

On a  $f'(c) = \frac{1}{c \ln c}$  et  $x < c < y \Rightarrow x \ln x < c \ln c < y \ln y \Rightarrow \frac{1}{y \ln y} < \frac{1}{c \ln c} < \frac{1}{x \ln x}$ .

Finalement

$$\ln(\ln y) - \ln(\ln x) = f'(c)(y - x) < \frac{y - x}{x \ln x}$$

(ii) Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . On pose  $x = k$  et  $y = k + 1$ . On a bien  $1 < x < y$  donc on en déduit que

$$\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \frac{1}{k \ln k}.$$

(iii) Par sommation entre  $k = 2$  et  $k = n$ , on obtient

$$\sum_{k=2}^n \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) < \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k+1) - f(k) &= (f(2) - f(1)) + (f(3) - f(2)) + \cdots + (f(n) - f(n-1)) + (f(n+1) - f(n)) \\ &= -f(1) + f(n+1) \\ &= \ln(\ln(n+1)). \end{aligned}$$

Comme  $\ln(\ln(n+1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , d'après les théorèmes de comparaisons à l'infini on en déduit

que la série harmonique  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \ln k}$  diverge vers  $+\infty$ .