Chapitre 5. Exercice A.2.24

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

1. • Tout d'abord on détermine le domaine de définition de f. Il s'agit de résoudre $x^2+x+1>0$. Le discriminant est $\Delta=-3<0$ et $a=1$ donc $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+x+1>0$. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+x+1}$ ne s'annulant pas, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par quotient de fonctions dérivables sur leur domaine de définition, on en déduit que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{2\sqrt{x^2+x+1}-(2x+1)\times\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} \\ =& \frac{\dfrac{4(x^2+x+1)-(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{(x^2+x+1)} = \frac{\dfrac{3}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{(x^2+x+1)} = \frac{3}{2(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}\ . \end{aligned}$$

• Puisque $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)>0$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
• Calcul des limites en $\pm\infty$:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x}{|x|}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$.
• L'image d'un intervalle ouvert par toute application continue et strictement monotone est un ouvert. D'après le tableau de variation de f, la continuité de f, on en déduit que $\text{Im}f =]-2\,;2[$ car l'ensemble $\mathbb{R}$ est un ouvert.
• La fonction f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une fonction réciproque g définie et continue sur $]-2\,;2[$.

2. Puis que f est dérivable et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors g est dérivable sur $]-2\,;2[$.
On a $g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}$. Calculons $g(1)$:

$$x=g(1)\Leftrightarrow f(x)=f(g(1))=1\Leftrightarrow\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}=1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(2x+1)^2}{x^2+x+1}=1\\ 2x+1>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(2x+1)^2=x^2+x+1\\ 2x+1>0\end{array}\right.$$

On a $(2x+1)^2-(x^2+x+1)=0\Leftrightarrow 3x^2+3x=0\Leftrightarrow\quad x=0$ ou $x=-1$.
La condition $2x+1>0$ entraîne $x=0$. Finalement

$$g'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{2}{3}.$$

Chapitre 5. Exercice A.2.21

1. Dans cette question, on utilise $\mathrm{Im}(\mathrm{Arcsin}\,) = [-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}]$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Arccos}\,) = [0\,,\pi]$.
Tout d'abord, on a l'équivalence suivante

$$\text{Déterminer } y = \mathrm{Arcsin}\,x \text{ étant donné } x \in [-1\,,1] \Leftrightarrow \text{ Résoudre } x = \sin y \text{ avec la condition } y \in [-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}]$$

Donc

$$\mathrm{Arcsin}\,(\sin\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\pi}{6}, \quad \mathrm{Arcsin}\,(\sin\tfrac{5\pi}{6}) = \mathrm{Arcsin}\,(\sin\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\pi}{6}, \quad \mathrm{Arcsin}\,(\sin\tfrac{7\pi}{6}) = \mathrm{Arcsin}\,(\sin(-\tfrac{\pi}{6})) = -\tfrac{\pi}{6}.$$

$$\text{Déterminer } y = \mathrm{Arccos}\,x \text{ étant donné } x \in [-1\,,1] \Leftrightarrow \text{ Résoudre } x = \cos y \text{ avec la condition } y \in [0\,,\pi]$$

Donc

$$\mathrm{Arccos}\,(\cos\tfrac{5\pi}{6}) = \tfrac{5\pi}{6}, \quad \mathrm{Arccos}\,(\cos\tfrac{7\pi}{6}) = \mathrm{Arccos}\,(\cos\tfrac{5\pi}{6}) = \tfrac{5\pi}{6}.$$

2. On pose $f(x) = \mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arccos}\,x$. On doit montrer que f est constante sur $[-1\,,1]$ et montrer que cette constante est $\frac{\pi}{2}$. Pour cela il suffit de montrer que $f'(x) = 0$ sur $]-1,1[$ et calculer $f(0)$.

• Les fonctions Arcsin et Arccos sont dérivables sur $]-1\,,1[$ donc f aussi. On a

$$f'(x) = \mathrm{Arcsin}'\,x + \mathrm{Arccos}'\,x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0.$$

• Par conséquent la fonction f est constante sur $[-1\,,1]$ et $\forall\, x \in [-1\,,1]$, $f(x) = f(0)$ et

$$f(0) = \mathrm{Arcsin}(0) + \mathrm{Arccos}(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Chapitre 5. Exercice A.2.6

5. • En pose $f(x) = \text{Arcsin}(2x+1)$. La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1\,,1[$ donc f est dérivable si $2x+1 \in\,]-1\,,1[\Leftrightarrow x \in\,]-1\,,0[$ et on a $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{-4x^2-4x}} = \dfrac{1}{\sqrt{-x(x+1)}}$.

• On pose $g(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. La fonction Arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est définie et dérivable pour $x \neq 1$ et on a $g'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2+(x+1)^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Chapitre 5. Exercice A.2.23 *(à étudier en travail personnel)*
Soit $f(x) = \text{Arctan}(\frac{x-1}{x+1})$.

1. La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

2. La fonction f est composée de fonctions dérivables sur leur domaine de définition donc f l'est aussi. On a

$$f'(x) = [\tfrac{x-1}{x+1}]' \times \text{Arctan}'(\tfrac{x-1}{x+1}) = \tfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} \times \tfrac{1}{1+(\frac{x-1}{x+1})^2} = \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} = \frac{2}{2x^2+2} = \frac{1}{1+x^2}$$

On remarque que $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ f'(x) = \text{Arctan}'x$.
On en déduit qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x \in]-\infty, -1[,\ f(x) = \text{Arctan}\, x + C_1$$

et

$$\forall\, x \in]-1, +\infty[,\ f(x) = \text{Arctan}\, x + C_2.$$

On peut déterminer ces constantes en déterminant les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En effet, par passage à la limite on doit avoir

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + C_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + C_2.$$

Or,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{x-1}{x+1} = 1 \text{ et } \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$$

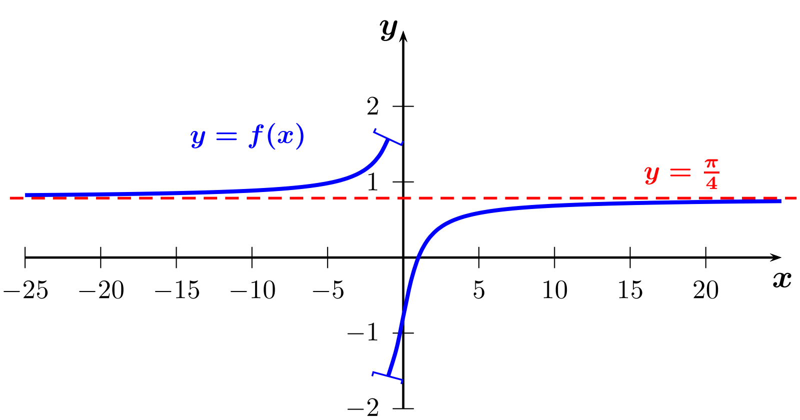
On en déduit que $C_1 = \frac{3\pi}{4}$ et $C_2 = -\frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\forall\, x \in]-\infty, -1[,\ f(x) = \text{Arctan}\, x + \tfrac{3\pi}{4}}$$

et

$$\boxed{\forall\, x \in]-1, +\infty[,\ f(x) = \text{Arctan}\, x - \frac{\pi}{4}}.$$

3. On trace les deux morceaux de courbes associées aux expressions ci-dessus en s'inspirant de la courbe représentative de Arctan.



4. D'après la question **2.**, on a $f(]-\infty,-1[)=]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $f(]-1,+\infty[)=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}[$.
Donc, $\boxed{\operatorname{Im} f=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}[\,\cup\,]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[}$.

5. Dans cette question, il faut faire attention au fait que le domaine de définition D de f n'est pas un intervalle.
• $\forall x\in D,\ f'(x)>0$. On en déduit que f est bijective de $]-\infty,-1[$ sur $f(]-\infty,-1[)=]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et f est bijective de $]-1,+\infty[$ sur $f(]-1,+\infty[)=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}[$.
• Pour conclure que f est bijective sur D, il faut préciser que

$$f(]-\infty,-1[)\cap f(]-1,+\infty[)=\varnothing.$$

Ainsi, chaque image $y\in\operatorname{Im} f$ admet un unique antécédent soit dans l'intervalle $]-\infty,-1[$, soit dans l'intervalle $]-1,+\infty[$.

6. On cherche l'expression algébrique de g. Soit $y\in\operatorname{Im} f$, on a

$$x=g(y)\Leftrightarrow f(x)=f\circ g(y)\Leftrightarrow f(x)=y.$$

Puis, on résout cette dernière équation d'inconnue x.

$$f(x)=y\Leftrightarrow \operatorname{Arctan}(\tfrac{x-1}{x+1})=y\Leftrightarrow \tfrac{x-1}{x+1}=\tan y\Leftrightarrow x-1=(x+1)(\tan y)\Leftrightarrow x(1-\tan y)=1+\tan y$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1+\tan y}{1-\tan y}\,.$$

D'où, $\boxed{g(y)=\frac{1+\tan y}{1-\tan y}}$. Pour obtenir la courbe représentative de g, il faut tracer le symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $y=x$.

7. On a

$$\begin{aligned}
g'(y)&=\frac{[1+\tan y]'(1-\tan y)-(1+\tan y)[1-\tan y]'}{(1-\tan y)^2}\\
&=\frac{(1+\tan^2 y)(1-\tan y)-(1+\tan y)(-1-\tan^2 y)}{(1-\tan y)^2}\\
&=\frac{\big(1+\tan^2 y-\tan y-\tan^3 y\big)-\big(-1-\tan^2 y-\tan y-\tan^3 y\big)}{(1-\tan y)^2}\\
&=\frac{2+2\tan^2 y}{(1-\tan y)^2}
\end{aligned}$$

On doit avoir $f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$. On calcule le dénominateur

$$\begin{aligned}
g'(f(x))=\frac{2+2\tan^2(f(x))}{(1-\tan(f(x)))^2}=\frac{2+2(\frac{x-1}{x+1})^2}{(1-(\frac{x-1}{x+1}))^2}&=\frac{2+2(\frac{x-1}{x+1})^2}{(1-(\frac{x-1}{x+1}))^2}\times\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2}\\
&=\frac{2(x+1)^2+2(x-1)^2}{\big((x+1)-(x-1)\big)^2}\\
&=\frac{2(x^2+2x+1)+2(x^2-2x+1)}{(2)^2}=x^2+1
\end{aligned}$$

On retrouve bien $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.