

Chapitre 6. Exercice A.2.6

Dans toute la suite ε est une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Elle varie d'une fonction à une autre.

2. Développements de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de $x = a$:

$$(i) \quad \forall h \in \mathbb{R}, e^{a+h} = e^a \times e^h = e^a \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} \right) + h^3 \varepsilon(h)$$

$$(ii) \quad \cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h = \cos(a) \left(1 - \frac{h^2}{2} \right) - \sin(a) \left(h - \frac{h^3}{6} \right) + h^3 \varepsilon(h)$$

$$\Rightarrow \quad \forall h \in \mathbb{R}, \cos(a+h) = \cos a - h \sin a - \frac{\cos(a)}{2} h^2 + \frac{\sin(a)}{6} h^3 + h^3 \varepsilon(h).$$

$$(iii) \quad \cos(a+h) = \cos a \sin h + \sin a \cos h = \cos(a) \left(h - \frac{h^3}{6} \right) + \sin(a) \left(1 - \frac{h^2}{2} \right) + h^3 \varepsilon(h)$$

$$\Rightarrow \quad \forall h \in \mathbb{R}, \sin(a+h) = \sin(a) + h \cos(a) - \frac{\sin(a)}{2} h^2 - \frac{\cos(a)}{6} h^3 + h^3 \varepsilon(h).$$

$$(iv) \quad \frac{1}{a+h} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{1+\frac{h}{a}}. \text{ On pose } t = \frac{h}{a} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ dans le DL usuel } \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^3 \varepsilon(t).$$

$$a < 0 \Rightarrow \quad \forall h \in]-\infty, -a[, \frac{1}{a+h} = \frac{1}{a} - \frac{h}{a^2} + \frac{h^2}{a^3} - \frac{h^3}{a^4} + h^3 \varepsilon(h).$$

ou

$$a > 0 \Rightarrow \quad \forall h \in]-a, +\infty[, \frac{1}{a+h} = \frac{1}{a} - \frac{h}{a^2} + \frac{h^2}{a^3} - \frac{h^3}{a^4} + h^3 \varepsilon(h).$$

$$(v) \quad \ln(a+h) = \ln \left(a \times \left(1 + \frac{h}{a} \right) \right) = \ln a + \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right).$$

$$\text{On pose } t = \frac{h}{a} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ dans le DL usuel } \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - t^3 \varepsilon(t).$$

$$\Rightarrow \quad \forall h \in]-a, +\infty[, \ln(a+h) = \ln(a) + \frac{h}{a} - \frac{h^2}{2a^2} + \frac{h^3}{3a^3} - h^3 \varepsilon(h).$$

$$(vi) \quad \sqrt{a+h} = \sqrt{a} \times \sqrt{1+\frac{h}{a}}.$$

$$\text{On pose } t = \frac{h}{a} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ dans le DL usuel } \sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - t^3 \varepsilon(t).$$

$$\Rightarrow \quad \forall h \in [-a, +\infty[, \sqrt{a+h} = \sqrt{a} + \frac{h}{2\sqrt{a}} - \frac{h^2}{8a\sqrt{a}} + \frac{h^3}{16a^2\sqrt{a}} - h^3 \varepsilon(h)$$

Exercice A.2.22

1. Il faut au moins un DL à l'ordre 3 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^3).$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^3).$$

$$f(x) = \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}) + (1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}) - 2 - x^2 + o(x^3)}{x^3} = \frac{x}{12} + o(x)$$

$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

2. Il faut au moins un DL à l'ordre 2 :

$$\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2 + \frac{1}{16}(2x)^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$f(x) = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - (1 + x - \frac{x^2}{2}) + o(x^2)}{x^2} = 1 + o(1)$$

$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

3. Il faut au moins un DL à l'ordre 4 :

$$e^{-x} \sin x = (1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24})(x - \frac{x^3}{6}) + o(x^4)$$

$$= x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$= x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3x} + o(1)$$

$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty.$$

4. On cherche la partie principale du numérateur :

$$\sin x - \ln(1+x) = (x - \frac{x^3}{6}) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

On cherche la partie principale du dénominateur :

$$(e^x - 1) \sin x = x^2 + o(x)$$

$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

5. On effectue un changement de variable : $t = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

$$x \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right) = \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - e}{t}.$$

On cherche la partie principale du numérateur au voisinage de $t = 0$:

$$(1+t)^{\frac{1}{t}} - e = e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} - e = g \circ f(t)$$

avec $f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ et $g(y) = e^y - e$.

(i) DL de f en 0 :

$$f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + o(t).$$

(ii) DL de g en $b = f(0) = 1$: on pose $b = 1 + k$

$$e^y = e^{1+k} = e(1+k) + o(k) \Rightarrow g(y) = g(1+k) = e^{1+k} - e = ek + o(k)$$

(iii) On compose les DLs en posant $k = -\frac{t}{2}$:

$$g \circ f(t) = -\frac{et}{2} + o(t)$$

On en déduit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1+x)^{\frac{1}{x}} - e = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}} - e}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{et}{2}}{t} = -\frac{e}{2}.$$

6. Utiliser

$$f(x) = \frac{1 + \tan^2 x - 2 \tan x}{1 + \cos 4x}$$

On commence par déterminer la partie principale du dénominateur plus simple :

$$1 + \cos 4x = 1 + \cos(\pi + 4h) = 1 - \cos(4h) = 8h^2 + o(h^2).$$

Pour le numérateur on applique T-Y à l'ordre 2 : soit $u(x) = 1 + \tan^2 x - 2 \tan x$, alors

$$u'(x) = 2(1 + \tan^2 x) \tan x - 2(1 + \tan^2 x),$$

$$u''(x) = 2(1 + \tan^2 x)(2 \tan^2 x - 2 \tan x) + 2(1 + \tan^2 x)^2,$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$u\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = u\left(\frac{\pi}{4}\right) + u'\left(\frac{\pi}{4}\right)h + \frac{u''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}h^2 + o(h^2) = 4h^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2}{8h^2} = \frac{1}{2}.$$

Chapitre 6. Exercice A.2.5

• 1ère fonction : On écrit

$$e^x \sqrt{1+x^2} = e^x \times (1+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On utilise le développement usuel au voisinage de 0 des fonction $f(x) = e^x$ et $g(x) = (1+X)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$. On a

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

$$g(X) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{X^2}{8} + X^2 \varepsilon_2(X), \quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ensuite, on pose $X = x^2$. Ainsi

$$h(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_3(x), \quad \varepsilon_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} f(x)h(x) &= (1+x+\frac{x^2}{2}) \times (1+\frac{x^2}{2}) + x^2 \varepsilon_4(x), \quad \varepsilon_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_5(x), \quad \varepsilon_5(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= 1 + x + x^2 + x^2 \varepsilon_5(x). \end{aligned}$$

• 2ème fonction : On écrit

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \ln(1+x) \times (1+x)^{-1}.$$

On peut utiliser les développements usuels au voisinage de 0 des fonctions $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = (1+x)^\alpha$ pour $\alpha = -1$. On a

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

$$g(x) = 1 - x + x^2 + x^2 \varepsilon_2(x), \quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x - \frac{x^2}{2}) \times (1 - x + x^2) + x^2 \varepsilon_3(x), \quad \varepsilon_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= x - x^2 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon_4(x), \quad \varepsilon_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + x^2 \varepsilon_4(x). \end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.8

1. Soit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln(1+x)}{1+\sin x}$ définie au voisinage de $x = 0$.

$$\text{DL de } f \text{ en } 0 \text{ à l'ordre } 3 : \quad f(x) \underset{x \approx 0}{=} \ln(1+x) \underset{x \approx 0}{=} \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}_{A_3(x)} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$\text{DL de } \sin \text{ en } 0 \text{ à l'ordre } 3 : \quad \sin(x) \underset{x \approx 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x)$$

$$\text{DL de } g \text{ en } 0 \text{ à l'ordre } 3 : \quad g(x) \underset{x \approx 0}{=} 1 + \sin x \underset{x \approx 0}{=} \underbrace{1 + x - \frac{x^3}{6}}_{B_3(x)} + x^3 \varepsilon_2(x)$$

Division selon les puissances croissantes de A_3 par B_3 sachant que $B_3(0) = 1 \neq 0$

$\begin{array}{r} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\ \hline -x(1 + x - \frac{x^3}{6}) \\ R_0 = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} \\ \hline -(-\frac{3}{2}x^2)(1 + x - \frac{x^3}{6}) \\ R_1 = \frac{11}{6}x^3 + \frac{x^4}{6} - \frac{1}{4}x^5 \\ \hline \dots \end{array}$	$\begin{array}{r} \textcolor{red}{1} + x - \frac{x^3}{6} \\ \hline x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 \end{array}$
---	--

Le DL de $\frac{f}{g}$ en $a = 0$ à l'ordre 3 est

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \approx 0}{=} \frac{\ln(1+x)}{1+\sin x} \underset{x \approx 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + x^3 \varepsilon_3(x)$$

2. Cette fois on considère la fonction $\frac{1}{1+\sin x} = g \circ f(x)$ avec $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \frac{1}{1+x}$. On applique la règle de composition de DL :

- DL à l'ordre 3 pour f en $a = 0$: $f(x) \underset{x \approx 0}{=} \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{P_3(x)} + x^3 \varepsilon_1(x)$
- DL à l'ordre 3 pour g en $b = f(0) = \sin 0 = 0$: $g(y) \underset{y \approx 0}{=} \underbrace{1 - y + y^2 - y^3}_{Q_3(y)} + y^3 \varepsilon_2(y)$
- DL de $g \circ f$ à l'ordre 3 en $a = 0$: on pose $y = P_3(x) - b = x - \frac{x^3}{6}$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &\underset{x \approx 0}{=} 1 - [x - \frac{x^3}{6}] + [x - \frac{x^3}{6}]^2 - [x - \frac{x^3}{6}]^3 + x^3 \varepsilon_3(x) \\ &\underset{x \approx 0}{=} 1 - x + \frac{x^3}{6} + x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon_3(x) \\ &\underset{x \approx 0}{=} 1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + x^3 \varepsilon_3(x) \end{aligned}$$

3. On effectue le produit des DLs de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+\sin x}$.

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{1+\sin x} &= [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}] \times [1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6}] + x^3 \varepsilon(x) \\ &= [x - x^2 + x^3] + [-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}] + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \\ &= x - \frac{3x^2}{2} + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})x^3 + x^3 \varepsilon(x) \\ &= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11}{6}x^3 + x^3 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

4. A faire avec les divisions selon les puissances croissantes.

(a) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x}{\cos x}$

$$e^x \underset{x \approx 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_1(x)$$

$$\cos(x) \underset{x \approx 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_2(x)$$

$\frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}{-1(1 - \frac{x^2}{2})}$	$\textcolor{red}{1} - \frac{x^2}{2}$
$R_0 = x + x^2 + \frac{x^3}{6}$	$1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3$
$\frac{-x(1 - \frac{x^2}{2})}{R_1 = x^2 + \frac{2}{3}x^3}$	
$\frac{-x^2(1 - \frac{x^2}{2})}{R_2 = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{2}}$	
$\dots$	

Conclusion : $\frac{e^x}{\cos x} \underset{x \approx 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x^3 \varepsilon(x)$

(b) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x}{x}$

Il faut un DL de sin à l'ordre 5 pour obtenir le résultat final à l'ordre 4 (après simplification par x).

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4 \varepsilon(x)$$

(c) Écrire $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$

$\frac{1}{-1(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120})}$	$\textcolor{red}{1} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$
$R_1 = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}$	$1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4$
$\frac{-\frac{x^2}{6}(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120})}{R_2 = \frac{7}{360}x^4 - \frac{x^6}{720}}$	
$\dots$	

Conclusion : $\frac{x}{\sin x} \underset{x \approx 0}{=} 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + x^4 \varepsilon(x)$

Chapitre 6. Exercice A.2.23 - Question 2

- Pour obtenir l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0, il faut déterminer le développement limité (D.L.) à l'ordre 1 de f en 0.
- Pour connaître la position de la courbe par rapport à la tangente, il faut un terme supplémentaire dans le D.L. (qui n'est pas forcément l'ordre 2).

Correction : D.L. à l'ordre 3 en 0 :

$$1 + e^{-x} = 1 + (1 + (-x) + \frac{1}{2!}(-x)^2 - \frac{1}{3!}(-x)^3) + x^3\varepsilon(x) = 2 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

Voici trois méthodes pour obtenir le D.L. :

1) Division selon les puissances croissantes :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \\ + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} & \\ - \frac{x^3}{24} \dots & \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48}}{} \end{array}$$

2) Composition de D.L.

$$\frac{1}{2+X} \underset{X \approx 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{4} - \frac{X^3}{8} \right) + X^3\varepsilon(X)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^{-x}} &= \frac{1}{2} - \frac{(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3)}{4} + \frac{(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3)^2}{8} - \frac{(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3)^3}{16} + x^3\varepsilon(x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

3) Application de la formule de Taylor-Young :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1+e^{-x}} \right)' &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \implies f'(0) = \frac{1}{4} \\ \left(\frac{1}{1+e^{-x}} \right)'' &= \frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} + \frac{2(e^{-x})^2}{(1+e^{-x})^3} \implies f''(0) = -\frac{1}{4} + \frac{2}{8} = 0 \\ \left(\frac{1}{1+e^{-x}} \right)''' &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} - \frac{2(e^{-x})^2}{(1+e^{-x})^3} - \frac{4(e^{-x})^2}{(1+e^{-x})^3} + \frac{6(e^{-x})^3}{(1+e^{-x})^4} \implies f'''(0) = -\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{4}{8} + \frac{6}{16} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

(un peu compliqué donc à éviter...)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

On en déduit que l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$. Pour en déduire la position de la courbe par rapport à la tangente, il faut étudier le signe de la différence $f(x) - y$ en fonction de x :

$$f(x) - y = -\frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)$$

Le reste $x^3\varepsilon(x)$ est négligeable par rapport au terme $-\frac{x^3}{48}$. On obtient

$x < 0 \Rightarrow f(x) - y > 0 \Rightarrow$ La courbe représentative de f est située au dessus de la tangente

$x > 0 \Rightarrow f(x) - y < 0 \Rightarrow$ La courbe représentative de f est située en dessous de la tangente