Chapitre 6. Exercice A.2.1

1. On utilise la formule de Taylor pour les polynômes P de degré 3

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3.$$

Donc pour $a = 0$ et avec les notations de l'énoncé on obtient

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3.$$

2. Pour $a = x_0$, on obtient

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \frac{a_2}{2}(x-x_0)^2 + \frac{a_3}{6}(x-x_0)^3.$$

3. Soit $P(x) = x^3 - 2x$. Il faut trouver la valeur de x_0 et les coefficients α_0, α_1, α_2 et α_3 de sorte que P s'écrive

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-1) + \alpha_2(x-1)^2 + \alpha_3(x-1)^3.$$

Par identification on trouve

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ \alpha_0 & = & P(1) = -1 \\ \alpha_1 & = & P'(1) = 1 \\ \alpha_2 & = & \frac{P^{(2)}(1)}{2} = 3 \\ \alpha_3 & = & \frac{P^{(3)}(1)}{6} = 1. \end{array}\right.$$

Vous pouvez vérifier l'égalité des deux écritures en développant l'expression

$$-1 + (x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

Chapitre 6. Exercice A.2.2

Questions 1 et 2 : Taylor-Young à l'ordre 4 et recherche d'infiniment petit en $a = 0$

Soit f une fonction 4 fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ alors il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Cette fonction f est un infiniment petit en 0 si $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Comme f est continue, il suffit de vérifier si $f(0) = 0$. Sa partie principale est *le premier terme non nul du développement de Taylor-Young où les monômes sont rangés selon les puissances croissantes*. L'ordre de la partie principale obtenue est *sa puissance*.

Aucun calcul de dérivation n'est attendu ! On utilise les formules usuelles en $a = 0$ de cos / sin / exp / ln.

(i) $f(x) = \alpha - \cos x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \alpha - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right] + x^4\varepsilon(x).$$

La formule de T-Y à l'ordre 4 est donc : il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (\alpha - 1) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Si $\alpha \neq 1$ alors $f(0) = \alpha - 1 \neq 0$ donc f n'est pas un infiniment petit.
Si $\alpha = 1$ alors $f(0) = 0$ et la partie principale est $\frac{x^2}{2}$ d'ordre 2.

(ii) $f(x) = \alpha - e^x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \alpha - \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right] + x^4\varepsilon(x).$$

La formule de T-Y à l'ordre 4 est donc : il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (\alpha - 1) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Si $\alpha \neq 1$ alors $f(0) = \alpha - 1 \neq 0$ donc f n'est pas un infiniment petit.
Si $\alpha = 1$ alors $f(0) = 0$ et la partie principale est x d'ordre 1.

(iii) $f(x) = \sin x - \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \left[x - \frac{x^3}{3!}\right] - \alpha x + x^4\varepsilon(x).$$

La formule de T-Y à l'ordre 4 est donc : il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1 - \alpha)x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f(0) = 0$ donc f est un infiniment petit quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Sa partie principale change selon les valeurs de α.
Si $\alpha \neq 1$ alors la partie principale est $(1 - \alpha)x$ d'ordre 1.
Si $\alpha = 1$ alors la partie principale est $-\frac{x^3}{3!}$ d'ordre 3.

(iv) $f(x) = \ln(2+x)$. Ici il faut factoriser par 2 pour se ramener au développement de T-Y usuel de $\ln(1+t)$ en $a = 0$:

$$\ln(2+x) = \ln(2(1+\frac{x}{2})) = \ln(2) + \ln(1+\frac{x}{2}).$$

$$\ln(1+t) \underset{t\approx 0}{=} t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + t^4\varepsilon_1(t) \Rightarrow \ln(1+\frac{x}{2}) \underset{x\approx 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{(\frac{x}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{x}{2})^3}{3} - \frac{(\frac{x}{2})^4}{4} + x^4\varepsilon_2(x).$$

La formule de T-Y à l'ordre 4 est donc : il existe une fonction ε_2 définie sur $]-2,+\infty[$ telle que :

$$\forall\, x > -2,\ f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{64} + x^4\varepsilon_2(x) \qquad \text{et } \varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

On a $f(0) = \ln(2) \neq 0$ donc f n'est pas un infiniment petit.

(v) $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_1(x),$$

puis avec changement de variable $x \leftrightarrow (-x)$ dans la formule précedente :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_2(x),$$

On soustrait ces développements pour obtenir la formule de T-Y à l'ordre 4 suivante : il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

On a $f(0) = 0$ donc c'est un infiniment petit et sa partie principale est x d'ordre 1.

(vi) $f(x) = \cosh x - 1$. On ajoute les développements de e^x et e^{-x} précédent pour obtenir la formule de T-Y à l'ordre 4 suivante : il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x) \qquad \text{et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

On a $f(0) = 0$ donc c'est un infiniment petit et sa partie principale est $\frac{x^2}{2}$ d'ordre 2.

(vii) $f(x) = (1+x)^4 - \alpha x - 1$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un polynôme de degré 4 donc sa dérivée 5ème est nulle. Le reste de Young est nul. La formule de Taylor pour les polynômes correspond à leur forme développée. Il suffit de développer la puissance $(1+x)^4$ pour obtenir la formule de T-Y à l'ordre 4 suivante : il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = (4-\alpha)x + 6x^2 + 4x^3 + x^4, \qquad \text{et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Pout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $f(0) = 0$ donc f est un infiniment petit.
Sa partie principale change selon les valeurs de α.
Si $\alpha \neq 4$ alors la partie principale est $(4-\alpha)x$ d'ordre 1.
Si $\alpha = 4$ alors la partie principale est $6x^2$ d'ordre 2.

Exercice A.2.19 *(à faire ou finir en travail personnel)*
Pour chaque fonction, il faut déterminer les trois premiers termes du D.L. en 0 et choisir les bonnes valeurs de a et b (ou de c et d) pour annuler les 2 premiers termes du DL. La partie principale sera donc le 3ème terme.

- $\tan x + a\sin x + b\sin^2 x$:
  Obtenir

  $$\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan x + a\sin x + b\sin^2 x = (1+a)x + bx^2 + (\frac{1}{3}-\frac{a}{6})x^3 + x^3\varepsilon(x^3),\ \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

  On pose $a=-1$ et $b=0$ pour obtenir une partie principale d'ordre 3 qui est $(\frac{1}{3}-\frac{a}{6})x^3 = \frac{1}{2}x^3$.
  Pour la fonction tangente et $\sin^2$, on utilise la formule de Taylor Young en $a=0$ à l'ordre 3

  $$\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan x = \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan''(0)}{2}x^2 + \frac{\tan^{(3)}(0)}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x),\ \text{avec } \varepsilon_1(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

  Les dérivées successives sont

  $$\tan' x = 1+\tan^2 x, \quad \tan''(x) = 2(1+\tan^2 x)\tan x, \quad \tan^3 x = 4(1+\tan^2 x)\tan^2 x + 2(1+\tan^2 x)^2$$

  On obtient

  $$\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \tan x = 0 + 1\times x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_1(x).$$

  De même pour $\sin^2$

  $$(\sin^2)'(x) = 2\cos(x)\sin(x) = \sin(2x),\ (\sin^2)''(x) = 2\cos(2x),\ (\sin^2)^{(3)}(x) = -4\sin(2x)$$

  On obtient

  $$\forall x\in\mathbb{R},\ \tan x = 0 + 0\times x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + x^3\varepsilon_2(x) = x^2 + x^3\varepsilon_2(x),\ \text{avec } \varepsilon_2(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + c\cos x + d\tan x$:
  Obtenir

  $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + c\cos x + d\tan x = (1+c) + (-\frac{1}{2}+d)x + (\frac{3}{8}-\frac{c}{2})x^2 + x^2\varepsilon(x),\ \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

  On pose $c=-1$ et $d=\frac{1}{2}$ et la partie principale est $(\frac{3}{8}-\frac{c}{2})x^2 = \frac{7}{8}x^2$.
  Pour la formule de Taylor-Young de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, il faut se référer au DL usuel en $a=0$ de $(1+x)^\alpha$:

  $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\times(-\frac{3}{2})}{1\times 2}x^2 + x^2\varepsilon(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x),\ \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Chapitre 6. Exercice A.2.4 *(à étudier en travail personnel)*

2. a) On applique la formule de T-Y en $a = \frac{\pi}{4}$ à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}\cos(\tfrac{\pi}{4}+h) &= \cos(\tfrac{\pi}{4}) - \sin(\tfrac{\pi}{4})h - \cos(\tfrac{\pi}{4})\frac{h^2}{2} + \sin(\tfrac{\pi}{4})\frac{h^3}{3!} + \cos(\tfrac{\pi}{4})\frac{h^4}{4!} + o(h^4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right) + o(h^4)\end{aligned}$$

b) Il faut utiliser la trigonométrie pour développer $\cos(\frac{\pi}{4}+h)$ ainsi que les développements usuels de $\cos h$ et $\sin h$ en 0.

$$\begin{aligned}\cos(\tfrac{\pi}{4}+h) &= \cos(\tfrac{\pi}{4})\cos(h) - \sin(\tfrac{\pi}{4})\sin(h) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4!}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(h - \frac{h^3}{3!}\right) + o(h^4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right) + o(h^4)\end{aligned}$$

Chapitre 6. Exercice A.2.2 *(à étudier en travail personnel)*

Questions 3 et 4 : Taylor-Lagrange à l'ordre 2 et recherche d'infiniment petit en $a = x_0 \neq 0$

Soit f une fonction 3 fois dérivables sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x + \theta(x - x_0))}{3!}(x - x_0)^3.$$

Cette fonction f est un infiniment petit en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Comme f est continue, il suffit de vérifier si $f(x_0) = 0$. Sa partie principale est *le premier terme non nul du développement de Taylor-Lagrange*. L'ordre de la partie principale obtenue est *sa puissance*.

(i) $f(x) = \alpha - \cos x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \big(\alpha - \cos(x_0)\big) + \sin(x_0)(x - x_0) + \cos(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} - \sin(x_0 + \theta(x - x_0))\frac{(x - x_0)^3}{3!}.$$

Si $\alpha \neq \cos x_0$ alors $f(0) = \alpha - \cos x_0 \neq 0$ donc f n'est pas un infiniment petit.
Si $\alpha = \cos x_0$ alors $f(0) = 0$ et c'est un infiniment petit. La partie principale dépend de x_0.
Si $\sin(x_0) \neq 0$, alors la partie principale est $\sin(x_0)(x - x_0)$ d'ordre 1.
Si $\sin(x_0) = 0$ alors $x_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\cos(x_0) = \pm 1 \neq 0$ donc la partie principale est $\cos(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}$ d'ordre 2.

(ii) $f(x) = \alpha - e^x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = (\alpha - e^{x_0}) - e^{x_0}(x - x_0) - e^{x_0}\frac{(x - x_0)^2}{2} - e^{x_0 + \theta(x - x_0)}\frac{(x - x_0)^3}{3}.$$

Si $\alpha \neq e^{x_0}$ alors $f(0) = \alpha - e^{x_0} \neq 0$ donc f n'est pas un infiniment petit.
Si $\alpha = e^{x_0}$ alors $f(0) = 0$ et la partie principale est $-e^{x_0}(x - x_0)$ d'ordre 1.

(iii) $f(x) = \sin x - x$.

$$f(x) = (\sin x_0 - x_0) + \cos(x_0)(x - x_0) - \sin(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} - \cos(x_0 + \theta(x - x_0))\frac{(x - x_0)^3}{3!}$$

On doit résoudre l'équation $\sin x_0 - x_0 = 0$:
- Si $|x_0| \geq \frac{\pi}{2}$ alors $|\sin x_0| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x_0|$. Donc $\sin x_0 \neq x_0$.
- Sur $I_1 =]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ou $I_2 =]0, \frac{\pi}{2}[$, on étudie les variations de $f(x) = \sin x - x$.

On calcule $f'(x) = \cos x - 1 < 0$. Cette fonction est strictement monotone et continue donc $\operatorname{Im} f$ est également un intervalle ouvert : $f(I_1) =]-1, 0[$ et $f(I_2) =]0, 1[$.
- On conclut que si $x_0 \neq 0$ alors $f(x_0) \neq 0$ et f n'est pas un infiniment petit.

(iv) $f(x) = (1 + x)^4 - 1$.

$$f(x) = \big((1+x_0)^4 - 1\big) + 4(1+x_0)^3(x - x_0) + 6(1+x_0)^2\frac{(x - x_0)^2}{2} + 4(1 + x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^3$$

On a $f(0) = (1 + x_0)^4 - 1$. On résoud $f(0) = 0$ pour déterminer les infiniments petits.

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow (1 + x_0)^4 = 1 \Rightarrow 1 + x_0 = \pm 1 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ ou } x_0 = -2.$$

Puisqu'on s'intéresse aux points $x_0 \neq 0$ on aboutit à la conclusion suivante :
Si $x_0 \neq -2$ alors f n'est pas un infiniment petit.
Si $x_0 = -2$ alors $f(0) = 0$ et la partie principale est $4(1 + x_0)^3(x - x_0) = -4(x + 2)$ d'ordre 1.