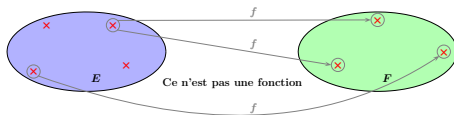


Chapitre II - Applications et nombres réels

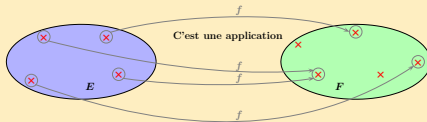
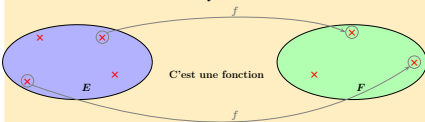
I Applications $f : E \rightarrow F$

A Définitions.



Definition

- Une **fonction** d'un ensemble de départ E vers un ensemble d'arrivée F , associe à tout élément x de E **au plus un** élément y de F .
- Une **application** d'un ensemble de départ E vers un ensemble d'arrivée F , associe **à tout** élément x de E **un et un seul** élément y de F .



Notation : $f : E \rightarrow F$
 $x \mapsto y = f(x)$

Vocabulaire :

- Le réel $y = f(x)$ est appelé **image** de x par f .
- Le réel x tel que $y = f(x)$ est appelé **antécédent** de y par f .
- L'ensemble $\{(x, y) \in E \times F ; y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f .

Caractérisation d'une application : f est une application de E dans $F \Leftrightarrow \boxed{\forall x \in E, \exists! y \in F, y = f(x)}$.

Les applications numériques usuelles. • Les fonctions polynômiales, la valeur absolue, sinus, cosinus, exponentielle sont des applications de $E = \mathbb{R}$ dans $F = \mathbb{R}$.

• On fera attention aux cas particuliers suivants :

$$\begin{array}{llllll} E = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \rightarrow & F = \mathbb{R} & E = [0, +\infty[& \rightarrow & F = \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y = \frac{1}{x} & x & \mapsto & y = \sqrt{x} \\ & & & & & E =]0, +\infty[\rightarrow F = \mathbb{R} \\ & & & & & x \mapsto y = \ln x \end{array}$$

• Lire la définition de **la fonction tangente** dans le complément de cours disponible sur Moodle.

Definition

Soit f une fonction de E dans F . Le **domaine de définition de f** est l'ensemble des antécédents des éléments de F par f . On note $D_f := \{x \in E; \exists y \in F, y = f(x)\}$.

Remarque : Une application $f : E \rightarrow F$ est alors une fonction vérifiant $D_f = E$.

Definition

Soit f une application de E dans F . L'**image de f** est l'ensemble des images des éléments de E par f . On note $\text{Im } f = \{y \in F; \exists x \in E, y = f(x)\} = f(E)$.

Exemples. préciser les images des applications usuelles.



En général, on a $\text{Im } f \subsetneq F$.

Definition

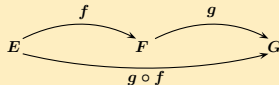
On appelle **application identité** de E , notée id_E , l'application définie de E dans E par $\forall x \in E, \text{id}_E(x) = x$.

Definition

Soit E, F et G des ensembles. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

La **composée de f par g** , notée $g \circ f$, est l'application définie de E dans G par $\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$.

Diagramme :



 La composition n'est pas commutative : $g \circ f \neq f \circ g$ en général

Exemple. Soit $f : E = \mathbb{R} \rightarrow F = [0, +\infty[$ $g : F = [0, +\infty[\rightarrow E = \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = x^2$ $x \mapsto y = \sqrt{x}$

- La composée $g \circ f$ vérifie
- La composée $f \circ g$ vérifie

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Alors $f \circ \text{id}_E = \text{id}_F \circ f = f$.

B Propriétés.

Definition

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

- L'application f est dite **injective** si « pour $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution dans E ».

Autrement dit, $\forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.

- L'application f est dite **surjective** si « pour $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution dans E ». Autrement dit, $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

- L'application f est dite **bijjective** si « pour $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution dans E ». Autrement dit, $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

Proposition

f est bijective $\Leftrightarrow f$ est injective et surjective.

Exemple : Pour tout sous ensemble $E \subset \mathbb{R}$, id_E est bijective.

Exercice 1 : Déterminer E et F de sorte que $f : E \rightarrow F$ soit bijective.

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & y = 2x^2 - 3x + 1 \end{array}$$

Correction. en cours