Definition

1. Une suite (u_n) est dite **majorée** si $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$
2. Une suite (u_n) est dite **minorée** si $\exists\, m \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m.$
3. Une suite (u_n) est dite **bornée** si elle est majorée et minorée.
   Autrement dit, $\exists M \geqslant 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M.$

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

preuve. *en cours*

⚠ La réciproque est fausse ! une suite peut être bornée sans converger.

Contre-exemple : Étude de la suite définie, pour $n \geqslant 0$, par $u_n = (-1)^n$.

Definition

1. Un suite (u_n) est dite **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$ (ou $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$).
2. Un suite (u_n) est dite **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n+1}$ (ou $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$).
3. Une suite est dite **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.
4. Une suite est dite **strictement monotone** si l'inégalité est démontrée au *sens stricte*.

Theorem (Convergence des suites monotones)

1. *Toute suite (u_n)* ***croissante et majorée*** *est convergente vers une limite ℓ. De plus,* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.
2. *De même, toute suite (u_n)* ***décroissante et minorée*** *est convergente vers une limite ℓ.*
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \ell$.

preuve du 1. *en cours*

Exercice : Soit (u_n), la suite récurrente définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Montrer que (u_n) converge.

Correction. *en cours*

II Opérations sur les suites convergentes

Theorem (de comparaison)

1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ respectivement.*
   *On suppose que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$. Alors, $\ell \leqslant \ell'$ (**th. de comparaison des limites**).*
2. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.*
   Soit (w_n) une autre suite telle que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
   *Alors $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ également (**th. des gendarmes**).*

Corollary (du th. des gendarmes)

1. *Soit (v_n) une suite convergeant vers 0 et soit (u_n) une autre suite vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant v_n$.*
   *Alors, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ également (**corollaire 1**).*
2. *Soit (u_n) une suite bornée et soit (v_n) une autre suite convergeant vers 0.*
   *Alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ également (**corollaire 2**).*

preuve. *en cours*
On montre que le th. des gendarmes $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ ②.

Exemple : Montrer, suivant différents raisonnements, que la suite de terme général $\left(u_n = \frac{\sin n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.
Correction. *en cours*

.

Theorem (somme/produit/quotient)

Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites convergentes avec* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. *Alors,*

① *(somme)* $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$ ② $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell$

③ *(produit)* $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$ ④ *(quotient)* $(\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0 \text{ et } \ell' \neq 0) \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell'}$.

preuve du ③. *en cours*

III Suites particulières

A Suites adjacentes

Theorem (et définition)

Soient (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles vérifiant*

(i) (u_n) *est croissante*

(ii) (v_n) *est décroissante*

(iii) $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

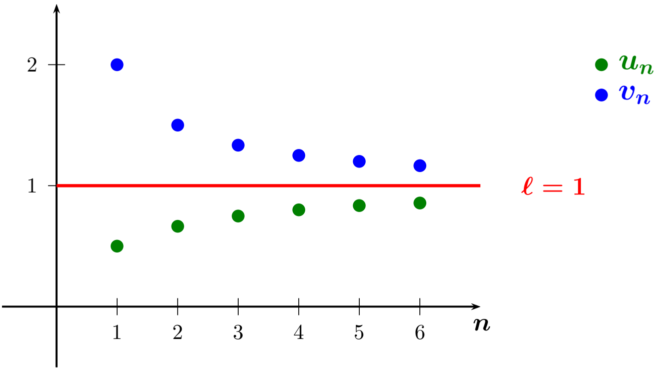
Alors les suites (u_n) *et* (v_n) *convergent vers la même limite* $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que (u_n) *et* (v_n) *sont deux* ***suites adjacentes***.

preuve. *en cours*

Remarque. Ce théorème permet de démontrer que deux suites convergent sans connaitre leurs limites.

Exercice : Soit (u_n) et (v_n), deux suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{n}{n+1}$ et $v_n = \frac{n+1}{n}$
Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.

Correction. *en cours*
Ci-dessous la répartition des termes des deux suites (u_n) et (v_n).



Tout couple de suites adjacentes se comporte ainsi.