Lire le paragraphe 7.1.5

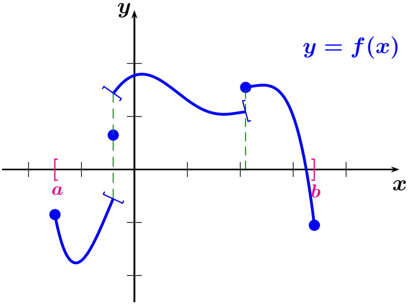
Conventions compatibles avec la relation de Chasles : $\boxed{\int_a^a f(t)\,dt = 0}$ et $\boxed{\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt}$

$\boxed{C}$ Intégrale et primitive d'une fonction continue

Theorem (admis)

1. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.* ***Toute fonction continue sur*** $[a, b]$ ***est intégrable sur*** $[a, b]$.
2. ***Si*** f ***est bornée et continue par morceau sur*** $[a, b]$, *càd continue sauf en un nombre fini de points où elle admet une limite à droite et une limite à gauche,* ***alors*** f ***est intégrable sur*** $[a, b]$.

Exemple de fonction bornée continue par morceau :



Theorem (primitive qui s'annule en a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit $\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$ *pour tout $x \in I$. Alors F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. On dit que F est* ***la primitive de f qui s'annule en a***.

NB : f continue $\Rightarrow$ F est de classe $\mathscr{C}^1$.

preuve : On étudie le taux d'accroissement de F en chaque point $x \in I$.

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \Rightarrow \boxed{\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt}$$

(h>0).

(h<0).

Corollary (forme générale des primitives)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives. *Étant donnée une primitive particulière F de f, la forme générale des primitives est $G(x) := \int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.*
Deux primitives de f définies sur le même intervalle I diffèrent d'une constante.

preuve : On pose $H(x) = G(x) - F(x)$ sur I. On a $\forall\, x \in I,\ H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc H est constante sur I.

Calcul intégral : Soit $(a, b) \in I^2$. Connaissant G une primitive de f définie sur I, en pratique, on effectue le calcul intégral en écrivant

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a).$$

⚠ **Ne pas confondre :** le réel $\int_a^b f(t)\,dt$, appelé intégrale de f sur $[a, b]$, avec la fonction $\int f(x)\,dx$, appelée forme générale des primitives de f.

Exemples. Donner la forme générale des primitives de $x \mapsto e^{ax+b}$, $\cos(ax+b)$, $\sin(ax+b)$, $\frac{1}{(ax+b)^n}$, $n \geqslant 1$.

Theorem (Intégration de DLs)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I admettant un DL à l'ordre n en $a \in I$, càd

$$f(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h), \qquad \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Alors f admet une primitive F définie et dérivable sur I. De plus, F admet un DL à l'ordre $n+1$ en a, càd

$$F(a+h) = F(a) + \alpha_0 h + \frac{\alpha_1}{2} h^2 + \frac{\alpha_2}{3} h^3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n+1} h^{n+1} + h^{n+1} \tilde{\varepsilon}(h), \qquad \tilde{\varepsilon}(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Exemple : Déterminer le DL de $\operatorname{Arctan} x$ à l'ordre 5 au voisinage de $a = 0$.

$$\vdots$$

Exemple : Déterminer le DL de $F(x) = \int_2^x \frac{1}{2-2t+t^2}\,dt$ à l'ordre $n = 5$ en $a = 0$.

$$\vdots$$