

III Les infiniments petits

Application au calcul de limites :

On remplace la fonction par sa partie principale pour lever l'indétermination de type $(\frac{0}{0})$.

Exemple 1. Déterminer la limite de $\frac{\ln(1+x^2)}{1+x-e^x}$ quand $x \rightarrow 0$.

⋮

Exemple 2. Déterminer la limite de $\frac{x(\ln x)^2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ quand $x \rightarrow 1$.

⋮

IV Développement limité

Definition

Soit Ω un intervalle ouvert contenant a et f une fonction définie sur $\Omega \setminus \{a\}$.

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a** s'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tels que

$$\forall x = a + h \in \Omega, \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - a) + \dots + \alpha_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x - a)$$

ou bien $f(a + h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \dots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h) \quad \text{et } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$

Exemple 1 : Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exemple 2 : Toute fonction de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I avec $a \in I$ admet un DL à l'ordre n en a .
Il s'agit du développement de Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x - a).$$

 **La réciproque est fautive !**

⚠ La réciproque est fautive pour $n \geq 2$!

Contre-exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. La fonction f admet un DL à l'ordre 2 et 3 en $a = 0$:

2. La fonction f n'est pas de classe \mathcal{C}^2 sur $I = \mathbb{R}$ (avec $a = 0 \in I$) : voir TP7

Theorem

Le développement limité de f à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a , lorsqu'il existe, est unique.

Theorem (opérations sur les DLs)

Soient f et g deux fonctions admettant un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a . On note $P_n(x - a)$ et $Q_n(x - a)$ leur partie régulières respectives.

- ❶ Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors (λf) admet un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a de partie régulière $\lambda P_n(x - a)$.
- ❷ La somme $(f + g)$ admet un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a de partie régulière $P_n(x - a) + Q_n(x - a)$.
- ❸ Le produit (fg) admet un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a de partie régulière $P_n(x - a) \times Q_n(x - a)$ tronquée à la puissance n .

Exemples : Soit $f(x) = x \cos x$ et $g(x) = 1 - 3 \sin x$. Déterminer les DLs d'ordre 3 en 0 de $(f + g)$ et (fg) .

- $f(x) =$
- $g(x) =$
- $f(x) + g(x) =$
- $(f(x)g(x)) =$

 Le degré de la partie régulière de $(f + g) \leq n = 3$

 On tronque la partie régulière de (fg) à l'ordre $n = 3$

Division selon les puissances croissantes d'un polynôme A par un polynôme B

Definition (valuation)

La **valuation** d'un polynôme rangé selon les puissances croissantes est le degré du premier terme non nul. (c'est-à-dire la plus petite puissance parmi les monômes de P_n).

On suppose que $B(0) \neq 0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (Q_n, R_n), 2 \text{ polynômes tels que } A = BQ_n + R_n \quad \text{où} \quad \begin{cases} \deg Q_n \leq n \\ \text{val } R_n \geq n + 1 \end{cases}$$

Exemple de calcul. Soit $A(x) = 3 + 2x - 6x^2$ et $B(x) = 1 - x^2$.

$3 + 2x - 6x^2$	$1 - x^2$

On a

Division selon les puissances croissantes d'un polynôme A par un polynôme B

Definition (valuation)

La **valuation** d'un polynôme rangé selon les puissances croissantes est le degré du premier terme non nul. (c'est-à-dire la plus petite puissance parmi les monômes de P_n).

On suppose que $B(0) \neq 0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (Q_n, R_n), 2 \text{ polynômes tels que } A = BQ_n + R_n \quad \text{où} \quad \begin{cases} \deg Q_n \leq n \\ \text{val } R_n \geq n + 1 \end{cases}$$

Exemple de calcul. Soit $A(x) = 3 + 2x - 6x^2$ et $B(x) = 1 - x^2$.

$3 + 2x - 6x^2$	$1 - x^2$
$-3(1 - x^2)$	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
$R_0 = 2x - 3x^2$	$\underbrace{\quad 3 \quad}_{R_0}$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	$\underbrace{\hspace{10em}}$

On a $A = Q_0B + R_0$

Division selon les puissances croissantes d'un polynôme A par un polynôme B

Definition (valuation)

La **valuation** d'un polynôme rangé selon les puissances croissantes est le degré du premier terme non nul. (c'est-à-dire la plus petite puissance parmi les monômes de P_n).

On suppose que $B(0) \neq 0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (Q_n, R_n), 2 \text{ polynômes tels que } A = BQ_n + R_n \quad \text{où } \begin{cases} \deg Q_n \leq n \\ \text{val } R_n \geq n + 1 \end{cases}$$

Exemple de calcul. Soit $A(x) = 3 + 2x - 6x^2$ et $B(x) = 1 - x^2$.

$3 + 2x - 6x^2$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $-3(1 - x^2)$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $R_0 = 2x - 3x^2$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $-2x(1 - x^2)$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $R_1 = -3x^2 + 2x^3$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/>	$1 - x^2$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $\underbrace{3}_{Q_0} + 2x$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $\underbrace{\hspace{10em}}_{Q_1}$
--	--

On a $A = Q_0B + R_0 = Q_1B + R_1$

Division selon les puissances croissantes d'un polynôme A par un polynôme B

Definition (valuation)

La **valuation** d'un polynôme rangé selon les puissances croissantes est le degré du premier terme non nul. (c'est-à-dire la plus petite puissance parmi les monômes de P_n).

On suppose que $B(0) \neq 0$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (Q_n, R_n), 2 \text{ polynômes tels que } A = BQ_n + R_n \quad \text{où } \begin{cases} \deg Q_n \leq n \\ \text{val } R_n \geq n + 1 \end{cases}$$

Exemple de calcul. Soit $A(x) = 3 + 2x - 6x^2$ et $B(x) = 1 - x^2$.

$3 + 2x - 6x^2$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $-3(1 - x^2)$ $R_0 = 2x - 3x^2$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $-2x(1 - x^2)$ $R_1 = -3x^2 + 2x^3$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $-(-3x^2)(1 - x^2)$ $R_2 = 2x^3 - 3x^4$	$1 - x^2$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $\underbrace{3}_{Q_0} + 2x - 3x^2$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{Q_1}$ $\underbrace{\hspace{15em}}_{Q_2}$
--	---

On a $A = Q_0B + R_0 = Q_1B + R_1 = Q_2B + R_2 = \dots$

Theorem (quotient de DLs)

Soient f et g deux fonctions admettant un DL d'ordre n en a , c'à d

$$f(x) = A_n(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_1(x - a) \text{ et } g(x) = B_n(x - a) + (x - a)^n \varepsilon_2(x - a) \text{ avec } \varepsilon_i(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

On suppose que $B_n(0) \neq 0$. Soit (Q_n, R_n) le résultat de la division selon les puissances croissantes de A_n par B_n . Alors le quotient $\frac{f}{g}$ admet un DL d'ordre n en a dont la partie régulière est $Q_n(x - a)$.



On effectue la division de $A_n(h)$ par $B_n(h)$ pour la variable $h = x - a$.

Exemple. Déterminer le DL à l'ordre 2 en $a = 0$ de $\frac{e^x}{1 + \cos x}$.

⋮