

IV Calcul Intégral

A Intégration par parties (I.P.P.)

Theorem

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $a, b \in I$.

Alors,
$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt \quad (\text{pour les intégrales}),$$

ou bien
$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx \quad (\text{pour les primitives}).$$

preuve : on utilise la formule de dérivation d'un produit.

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow u'v = (uv)' - uv'$$

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(t)v(t) dt &= \int_a^b (uv)'(t) dt - \int_a^b u(t)v'(t) dt \\ &= \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt. \end{aligned}$$

Quelques règles d'utilisation :

- ❶ Pour calculer $\int f(x) dx$ où $f(x) = \begin{cases} \ln x \\ \operatorname{Arcsin} x, \operatorname{Arccos} x, \operatorname{Arctan} x \\ \operatorname{Argsh} x, \operatorname{Argch} x, \operatorname{Argth} x \quad (\text{à venir}) \end{cases}$
on effectue **une seule I.P.P** en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = f(x)$.

- ❷ Pour calculer $\int P(x)e^{ax+b} dx$, où P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$:
on effectue **n I.P.P successives** avec $u'(x) = e^{ax+b}$ et $v(x) = \text{le polynôme}$

($\rightarrow$ Idem avec $\int P(x) \sin(ax + b) dx$ ou $\int P(x) \cos(ax + b) dx$).

- ❸ Pour calculer $G(x) := \int \sin(nx)e^{ax+b} dx$:

On effectue **2 I.P.P. successives** avec le choix $u'(x) = e^{ax+b}$ et $v(x) = \sin(nx)$ ou $\cos(nx)$,
puis on résout une équation d'inconnue $G(x)$.

($\rightarrow$ Idem avec $G(x) := \int \cos(nx)e^{ax+b} dx$.)

Exercice A.2.15 : Calculs de I_1 et I_4

B Changement de variable

→ on utilise la formule de dérivation de fonctions composées : $(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \times \varphi'(x)$.

Theorem

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. On suppose que φ est une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $[a, b] \subset \text{Im } \varphi \subset I$. Alors,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x)) \times \varphi'(x) dx.$$

preuve : Soit F une primitive de f . D'un côté, on sait que $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

De l'autre côté, on a $F'(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$ et

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(x)) \times \varphi'(x) dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} [F \circ \varphi]'(x) dx = [F \circ \varphi]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \\ &= F \circ \varphi(\varphi^{-1}(b)) - F \circ \varphi(\varphi^{-1}(a)) \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

Exercice : Calculer $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-t^2} dt$.

- ❶ On pose le changement de variable $t = \varphi(x) = \sin x$.

La fonction $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est bijective.

- ❷ On change les bornes, càd on détermine $x = \varphi^{-1}(-\frac{1}{2})$ et $x = \varphi^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Plus précisément, on résout

$$\begin{aligned} t = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \sin x \text{ et } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin x \text{ et } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

- ❸ On exprime dt en fonction de dx : $\frac{dt}{dx} = \frac{d[\sin x]}{dx} = \cos x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

- ❹ On exprime l'intégrant $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ en fonction de x :

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = \cos x \quad \text{car } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

- ❺ On calcule l'intégrale de la variable x : $\sqrt{1-t^2} dt = \cos x \times \cos x dx$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-t^2} dt &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \left(-\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Exercice : Calculer $\int_{-1}^0 \frac{1}{4t^2 + 6t + 3} dt$.

Exercice : Calculer $\int_{-1}^0 \frac{t + 2}{4t^2 + 6t + 3} dt$.