Chapitre 4. Exercice A.2.3

1. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = \dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}}{x+1} = \dfrac{x(\frac{x^2+1}{x^3})^{\frac{1}{3}}}{x(1+\frac{1}{x})} = \dfrac{(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})^{\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+\frac{1}{x^3} = 0$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue en 0 donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1$ donc en utilisant les opérations sur les limites, on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$.

2. Montrer que $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = 1$.

3. En posant $a = \sqrt[6]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{6}}$, montrer que pour $x \neq 0$ c-à-d $a \neq 1$ on a

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \frac{a^3-1}{a^2-1} = \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a^2+a+1}{a+1} .$$

Ensuite, on utilise la composition de limites : $\lim\limits_{x\to0} a = 1$ et $\lim\limits_{a\to1} \dfrac{a^2+a+1}{a+1} = \dfrac{3}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \dfrac{3}{2}$.

4. On écrit $\dfrac{x}{x^2+\sin x} = \dfrac{1}{x+\frac{\sin x}{x}}$.

En cours ils ont vu que $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$.Grâce aux opérations sur les limites, on trouve $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{x^2+\sin x} = 1$.

5. Calculer pour $x \neq 0$, $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)} = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \dfrac{\sin x}{(1+\cos x)}$. La forme ainsi obtenue n'est plus indéterminée. On obtient $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{0}{2} = 0$.

6. Calculer $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x} = \dfrac{(1-\cos x)\cos^2 x}{x\sin x} = \dfrac{(1-\cos x)}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin x} \times \cos^2 x$.

On a montré en cours que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1-\cos x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ et $x \mapsto \cos x$ est continue en 0 et $\cos 0 = 1$.

D'après les opérations sur les limits, on en déduit que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x} = \dfrac{1}{2}$.

AUTRE POSSIBILITÉ :

Sachant que $\tan^2 x = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$, calculer $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x} = \dfrac{(1-\cos x)\cos^2 x}{1-\cos^2 x} \times \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\cos^2 x}{1+\cos x} \times \dfrac{\sin x}{x}$.

On a montré en cours que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et cos est continue en 0 donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x} = \dfrac{1}{2}$.

Chapitre 4. Exercice A.2.4

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$.

Initialisation : pour $n = 0$, on a $\forall\, x \neq 0$, $\dfrac{(1+x)^0 - 1}{x} = \dfrac{1-1}{x} = 0$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^0 - 1}{x} = 0$.

Hérédité : On suppose que pour $n \geq 0$ fixé, on a $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$. Alors,

$$\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x} = \frac{(1+x)(1+x)^n - 1}{x} = \frac{(1+x)^n + x(1+x)^n - 1}{x} = (1+x)^n + \frac{(1+x)^n - 1}{x}\ .$$

D'après l'hypothèse de récurrence et $(1+x)^n \underset{x\to 0}{\to} 1$, on en déduite que $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{n+1} - 1}{x} = 1 + n$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$.

4. On factorise par $\frac{1}{x^2}$ dans la racine carrée :

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{|x|}\left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 + x - x^2}\right).$$

Ensuite on utilise la méthode du conjugué

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} &= \frac{1}{|x|}\frac{(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 + x - x^2})(\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 + x - x^2})}{\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 + x - x^2}} \\ &= \frac{1}{|x|}\frac{2x^2}{\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 + x - x^2}}\end{aligned}$$

On a si $x < 0$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} = -\frac{2x}{\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 + x - x^2}} \underset{x\to 0^-}{\to} 0$$

et si x>0

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} = +\frac{2x}{\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 + x - x^2}} \underset{x\to 0^+}{\to} 0$$

Donc la limite existe et $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1} = 0$.

6. On factorise par $\sqrt{x}$:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} \underset{x\to+\infty}{\to} 1.$$

8. On factorise par e^x et on utilise $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$:

$$\frac{e^{3x} + 1}{e^x - 2} = \frac{e^x(e^{2x} + e^{-x})}{e^x(1 - 2e^{-x})} = \frac{e^{2x} + e^{-x}}{1 - 2e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty.$$

Chapitre 4. Exercice A.2.5

1. Soit $\ell > 0$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}\ \Big(|x-a| < \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon\Big)$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, cela se réécrit pour $V =]a-\eta, a+\eta[$

$$\forall x \in V\backslash\{a\},\ \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

Choisissons $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$, ainsi

$$\forall x \in V\backslash\{a\},\ f(x) > \frac{\ell}{2} > 0.$$

2. Soit $\ell < 0$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell$. On montre dans ce cas qu'il existe un voisinage de valeur de a sur lequel f est stictement négative. Choisissons $\varepsilon = -\frac{\ell}{2} > 0$, ainsi

$$\forall x \in V\backslash\{a\},\ f(x) < \frac{\ell}{2} < 0.$$

3. On ne peut rien conclure. La fonction $f(x) = x$ vérifie $f(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$ et

$$\forall \eta > 0,\ \exists \left(x = -\frac{\eta}{2}, x' = \frac{\eta}{2}\right) \in V\backslash\{a\},\ f(x) < 0 \text{ et } f(x') > 0.$$

Chapitre 4. Exercice A.2.7 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1-x+\frac{|x|}{x}}$.
Pour étudier les limites de f, il est plus pratique de simplifier son expression en fonction du signe de x. Sachant que $|x| = x$ si $x > 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$, on en déduit que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

• Le domaine de définition de f est alors $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0; 2\}$.
Étant composée de fonctions usuelles (polynômes) continues, la fonction f est continue sur son domaine de définition : $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0; 2\}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Il reste à étudier les limites en $x_0 = 0$ et en $x_0 = 2$.

• En $x_0 = 0$, on étudie les limites à gauche et à droite séparément :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0}{2} = 0.$$

Les limites à gauche et à droite de $x_0 = 0$ sont différentes donc f n'admet pas de limite en $x_0 = 0$.

• En $x_0 = 2$, on a

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

La fonction f n'admet pas de limite en $x_0 = 2$ non plus.

Énoncé hors poly. Soit f l'application définie et continue sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|x-y|$.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) =]0,1]$.
3. Montrer que f et $f \circ f$ admettent un unique point fixe, $\alpha \in]0,1[$. (utiliser A.2.12 Q1. et Q2.)
4. Dresser le tableau de signe de $g(x) = f \circ f(x) - x$.
5. Démontrer que la suite définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α. (Étudier u_{2n} et u_{2n+1}.)
6. Qu'en est-il si $u_0 < 0$?

---

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = (y-x) \times \frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Il reste à démontrer que $\left|\frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Supposons $(x+y) \geq 0$. Alors $\left|\frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| = \frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)}$ et

$$\frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}y + \sqrt{2}x \leq 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 \Leftrightarrow 0 \leq \underbrace{(\frac{1}{2} - \sqrt{2}x + x^2)}_{(\frac{\sqrt{2}}{2}-x)^2} + \underbrace{(\frac{1}{2} - \sqrt{2}y + y^2)}_{(\frac{\sqrt{2}}{2}-y)^2} + x^2y^2$$

ce qui est toujours vrai.
Pour le case $x + y < 0$, on se ramène au cas $(-x) + (-y) > 0$ car $\left|\frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| = \left|\frac{(-y)+(-x)}{(1+(-x)^2)(1+(-y)^2)}\right|$.
On conclut :

$$|f(x) - f(y)| = |x-y| \times \left|\frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|x-y|.$$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow 0 < f(x) \leq 1$. On a donc $\operatorname{Im} f \subset]0,1]$.
Comme f est une application continue, on sait que $\operatorname{Im} f$ est un intervalle. Puisque $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Donc $]0,1] \subset \operatorname{Im} f$.
D'où l'égalité.

3. On pose $g(x) = f(x) - x$. On a $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaire, $\exists \alpha \in]0,1[,\ g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$. D'après l'exercice A.2.12 Q2, on en déduit que f admet un unique point fixe $\alpha \in]0,1[$.
L'application $f \circ f$ satsifait quand à elle : $f \circ f(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f \circ f(x) - f \circ f(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}|x-y| = \frac{1}{2}|x-y|.$$

Toujours, d'après l'exercice A.2.12 Q2, on en déduit que α est l'unique point fixe de $f \circ f$.
4. Le signe de $g(x)$ est constant de part et d'autre du point fixe.
On teste à gauche $g(0) = f(f(0)) - 0 = \frac{1}{2} > 0$ et à droite $g(1) = f(f(1)) - 1 = f(\frac{1}{2}) - 1 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5} < 0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

5. Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Comme f est décroissante, on a $f \circ f$ croissante et

$$0 \leq x \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq f(\alpha) = \alpha \Rightarrow 0 < f(f(x)) \leq f(\alpha) = \alpha$$

Donc $f \circ f([0, \alpha]) \subset [0, \alpha]$.

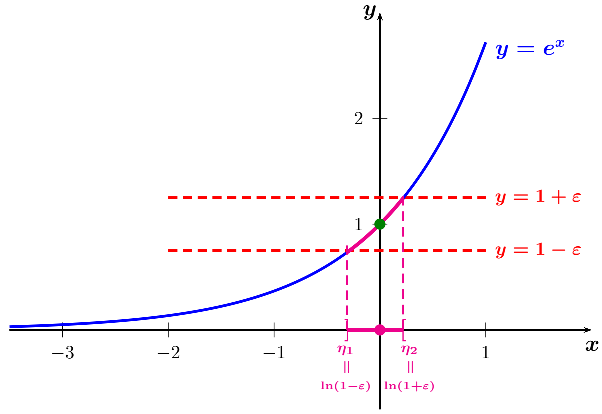
$$x \geq \alpha \Rightarrow 0 < f(x) \leq f(\alpha) = \alpha \Rightarrow 1 \leq f(f(x)) \geq f(\alpha) = \alpha$$

Donc $f \circ f([\alpha, +\infty[) \subset [\alpha, 1]$.
• la suite (u_{2n}) a pour premier terme u_0 et relation de récurrence $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$.
• la suite (u_{2n+1}) a pour premier terme u_1 et relation de récurrence $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$.
• Si $u_0 \in [0, \alpha[$ alors (u_{2n}) est croissante et majorée par α donc converge vers l'unique point fixe α. De plus $u_1 = f(u_0) > \alpha$ donc (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par α donc converge vers l'unique point fixe α également. On en déduit que $(u_n)_n$ converge vers α.
• Si $u_0 = \alpha$ alors (u_n) est constante égale à α.
• Si $u_0 \in]\alpha, +\infty[$ alors (u_{2n}) est décroissante et minorée par α donc converge vers l'unique point fixe α. De plus $0 < u_1 = f(u_0) \leq \alpha$ donc (u_{2n+1}) est croissante et majorée par α donc converge vers l'unique point fixe α également. On en déduit que $(u_n)_n$ converge vers α.
6. Si $u_0 < 0$ alors $u_1 = f(u_0) > 0$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers α.

Chapitre 4. Exercice A.2.11
1. On doit montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \Big(|x| < \eta \Rightarrow |e^x - 1| < \epsilon\Big)$$

Faire une figure!!!
preuve : Soit $\epsilon > 0$. On distingue deux cas.
• 1er cas : Si $0 < \epsilon < 1$ alors



$$|e^x - 1| < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \epsilon < e^x < 1 + \epsilon \Leftrightarrow \ln(1 - \epsilon) < x < \ln(1 + \epsilon)$$

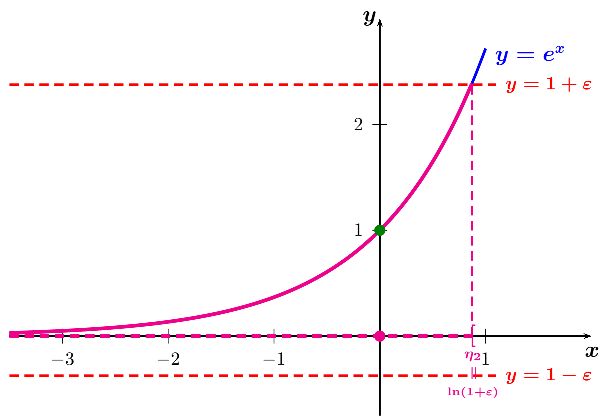
On remarque que $\ln(1-\epsilon) < 0$ et $\ln(1+\epsilon) > 0$. Prenons $\boxed{\eta = \min\big(-\ln(1-\epsilon), \ln(1+\epsilon)\big)}$. On obtient

$$|x| < \eta \Rightarrow -\eta < x < \eta \Rightarrow \ln(1 - \epsilon) < x < \ln(1 + \epsilon) \Rightarrow |e^x - 1| < \epsilon\ .$$

Pour aller plus loin, on peut montrer que $\min\big(-\ln(1-\epsilon), \ln(1+\epsilon)\big) = \ln(1+\epsilon)$. Il suffit d'étudier le signe de la différence entre ces deux nombres :

$$\ln(1+\epsilon) - \big(-\ln(1-\epsilon)\big) = \ln(1-\varepsilon^2) < 0 \quad \text{ car } 1 - \varepsilon^2 < 1 \text{ et } \ln \text{ est croissante.}$$

• 2ème cas : Si $\epsilon \geq 1$ alors



$$|e^x - 1| < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \epsilon < e^x < 1 + \epsilon \Leftrightarrow e^x < 1 + \epsilon \Leftrightarrow x < \ln(1 + \epsilon)$$

Prenons $\boxed{\eta = \ln(1+\epsilon)}$. On obtient

$$|x| < \eta \Rightarrow -\eta < x < \eta \Rightarrow x < \ln(1 + \epsilon) \Rightarrow |e^x - 1| < \epsilon\ .$$

2. Cas général : montrons la continuité de f en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.
On doit montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \Big(|x - x_0| < \eta \Rightarrow |e^x - e^{x_0}| < \epsilon \Big)$$

- On fixe $\varepsilon > 0$ et on résoud $|e^x - e^{x_0}| < \epsilon$ jusqu'à encadrer $x - x_0$.

  $$|e^x - e^{x_0}| < \epsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < e^x - x^{x_0} < \varepsilon \Leftrightarrow e^{x_0} - \varepsilon < e^x < e^{x_0} + \varepsilon$$

  Pour continuer nous devons distinguer les deux cas suivant : $\boxed{e^{x_0} - \varepsilon > 0}$ et $\boxed{e^{x_0} - \varepsilon \leq 0}$

- Cas n° 1 : on suppose $e^{x_0} - \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \varepsilon < e^{x_0}$. Dans ce cas on peut appliquer la fonction réciproque ln et terminer le calcul :

  $$|e^x - e^{x_0}| < \epsilon \;\Leftrightarrow\; \ln(e^{x_0} - \varepsilon) < x < \ln(e^{x_0} + \varepsilon) \;\Leftrightarrow\; \ln(e^{x_0} - \varepsilon) - x_0 < x - x_0 < \ln(e^{x_0} + \varepsilon) - x_0$$

  On a $\boxed{\eta_1 < x - x_0 < \eta_2}$ avec

  $$\eta_1 = \ln(e^{x_0} - \varepsilon) - x_0 = \ln(e^{x_0} - \varepsilon) - \ln e^{x_0} = \ln(e^{x_0} - \varepsilon) + \ln e^{-x_0} = \ln e^{-x_0}(e^{x_0} - \varepsilon) = \ln(1 - e^{-x_0}\varepsilon) < 0$$

  et

  $$\eta_2 = \ln(e^{x_0} + \varepsilon) - x_0 = \ln(1 + e^{-x_0}\varepsilon) > 0.$$

  Dans ce cas, on choisit, comme à la question précédente, $\boxed{\eta = \min(|\eta_1|, |\eta_2|) = \eta_2}$. On obtient

  $$|x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad -\eta < x - x_0 < \eta \quad \Rightarrow \quad \eta_1 < x - x_0 < \eta_2 \quad \Rightarrow \quad |e^x - e^{x_0}| < \epsilon\,.$$

- Cas n° 2 : on suppose $e^{x_0} - \varepsilon \leq 0 \Leftrightarrow \varepsilon \geq e^{x_0}$. Dans ce cas, on a

  $$|e^x - e^{x_0}| < \epsilon \Leftrightarrow e^{x_0} - \varepsilon < 0 < e^x < e^{x_0} + \varepsilon \Leftrightarrow e^x < e^{x_0} + \varepsilon \Leftrightarrow x < \ln(e^{x_0} + \varepsilon) \Leftrightarrow x - x_0 < \ln(1 + e^{-x_0}\varepsilon)$$

  Dans ce cas on pose $\boxed{\eta = \ln(1 + e^{-x_0})}$ et on obtient

  $$|x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad -\eta < x - x_0 < \eta \quad \Rightarrow \quad x - x_0 < \ln(1 + e^{-x_0}\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |e^x - e^{x_0}| < \epsilon\,.$$

Chapitre 4. Exercice A.2.14 Il s'agit de montrer que l'équation

$$f(x) = \frac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta}$$

admet au moins une solution dans l'intervalles $[a, b]$.

On distingue deux cas de figures :

• Si $f(a) = f(b)$ alors $\frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta} = f(a)$ et l'équation $f(x) = f(a)$ admet au moins deux solutions : $c = a$ ou $c = b$.

• On suppose maintenant que $f(a) \neq f(b)$. Dans ce cas, on peut montrer que le nombre $\frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta}$ est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. En effet, sachant que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a

$$f(a) < f(b) \Rightarrow \begin{cases} \alpha f(a) < \alpha f(b) \Rightarrow \alpha f(a) + \beta f(b) < \alpha f(b) + \beta f(b) \Rightarrow \frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta} < \frac{\alpha f(b)+\beta f(b)}{\alpha+\beta} = f(b) \\ \beta f(a) < \beta f(b) \Rightarrow \beta f(a) + \alpha f(a) < \beta f(b) + \alpha f(a) \Rightarrow \frac{\beta f(a)+\alpha f(a)}{\alpha+\beta} = f(a) < \frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

ou bien

$$f(a) > f(b) \Rightarrow \begin{cases} \alpha f(a) > \alpha f(b) \Rightarrow \alpha f(a) + \beta f(b) > \alpha f(b) + \beta f(b) \Rightarrow \frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta} > \frac{\alpha f(b)+\beta f(b)}{\alpha+\beta} = f(b) \\ \beta f(a) > \beta f(b) \Rightarrow \beta f(a) + \alpha f(a) > \beta f(b) + \alpha f(a) \Rightarrow \frac{\beta f(a)+\alpha f(a)}{\alpha+\beta} = f(a) > \frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[a, b]$, comme f est continue, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \frac{\alpha f(a)+\beta f(b)}{\alpha+\beta}$.

Chapitre 4. Exercice A.2.16

1a) Par définition du max :

$$\Big(y = \max(f(x_1), f(x_3)) \quad \Rightarrow \quad y \geq f(x_1) \text{ et } y \geq f(x_3)\Big).$$

Aussi d'après l'énoncé :

$$\Big(f(x_1) < f(x_2) \text{ et } f(x_3) < f(x_2) \qquad \Rightarrow \quad y = \max(f(x_1), f(x_3)) < f(x_2)\Big).$$

Ainsi

$$\Big(y < f(x_2) \Rightarrow y_2 = \frac{y + f(x_2)}{2} < \frac{f(x_2) + f(x_2)}{2} = f(x_2)\Big)$$

$$\text{et } \Big(y \geq f(x_1) \text{ et } f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow y_2 = \frac{y + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) + f(x_1)}{2}\Big)$$

On a montré que $y_2 \in]f(x_1), f(x_2)[$.
De même

$$\text{et } \Big(y \geq f(x_3) \text{ et } f(x_2) > f(x_3) \Rightarrow y_2 = \frac{y + f(x_2)}{2} > \frac{f(x_3) + f(x_3)}{2}\Big)$$

On a montré que $y_2 \in]f(x_3), f(x_2)[$.

1b) D'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$f(x_1) < y_2 < f(x_2) \quad \Rightarrow \quad \exists x \in]x_1, x_2[,\ y_2 = f(x)$$

$$f(x_3) < y_2 < f(x_2) \quad \Rightarrow \quad \exists x' \in]x_2, x_3[,\ y_2 = f(x')$$

De plus, $]x_1, x_2[\cap]x_2, x_3[= \varnothing \Rightarrow x \neq x'$. Pourtant $f(x) = f(x') = y_2$ donc f n'est pas injective.

1c) La fonction $-f$ vérifie les hypothèses des questions (a) et (b) donc $-f$ n'est pas injective. Enfin,

$$\Big(-f(x) = -f(x') \Rightarrow x = x'\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\Big)$$

Donc f n'est pas injective non plus.

2a) Les phrases

$$\exists\,(x_1, x_2, x_3) \in [a, b]^3,\ x_1 < x_2 < x_3 \text{ et } f(x_1) > f(x_2) \text{ et } f(x_3) > f(x_2)$$

ou

$$\exists\,(x_1, x_2, x_3) \in [a, b]^3,\ x_1 < x_2 < x_3 \text{ et } f(x_1) < f(x_2) \text{ et } f(x_3) < f(x_2)$$

expriment le changement de monotonie d'une fonction continue non constante.
Toute fonction non monotone n'est donc pas injective.

2b) vu en cours

2c) vu en cours

Chapitre 4. Exercice A.2.18
(i) Pour $x = 0$, on a $f_n(x) = n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
Pour $x \neq 0$, on utilise les équivalents :

$$f_n(x) \sim \frac{n}{\sqrt{(nx)^2}} = \frac{n}{|nx|} = \frac{1}{|x|} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{|x|}.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $D = \mathbb{R}^*$ vers la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{|x|}$.

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } |x| = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}, \text{ sinon.} \end{cases}$$

• Pour $|x| < 1$, $(x^n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique convergeant vers 0. On a aussi $x^{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $x^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Par conséquent

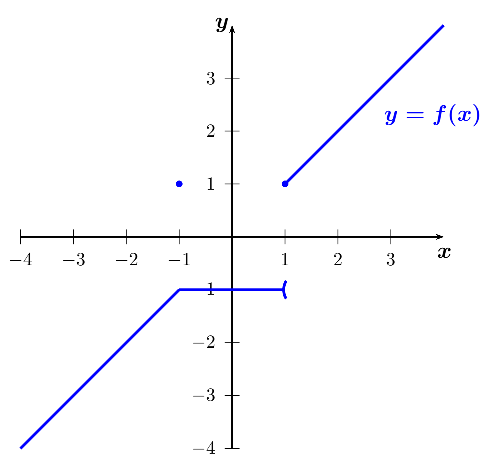
$$\forall\, |x| < 1,\ f(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

• Pour $|x| > 1$, on factorise les numérateurs et dénominateurs par les termes dominants pour déterminer la limite :

$$\frac{x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1} = \frac{x^{2n+1}}{x^{2n}} \times \frac{1+\frac{1}{x^{2n+1}}}{1-\frac{1}{x^{2n}}} = x \times \frac{1+\frac{1}{x^{2n+1}}}{1-\frac{1}{x^{2n}}}.$$

On a $|\frac{1}{x}| < 1$ donc $\frac{1}{x^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\frac{1}{x^{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et

$$\forall\, |x| > 1,\ f(x) = x \times \frac{1-0}{1+0} = x.$$



• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

En $a = -1$, on a

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -1 = \lim_{x\to-1^+} f(x).$$

Les limites à gauche et à droite de $a = -1$ sont égales. Cependant, $f(-1) = 1 \neq -1$ donc f n'est pas continue en $a = -1$.

En $a = 1$, on a

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = 1.$$

Les limites à gauche et à droite de $a = 1$ ne sont pas égales donc f n'est pas continue en $a = 1$. Cependant, on $f(1) = 1$, donc f est continue à droite de $a = 1$.