

Chapitre 4. Exercice A.2.12

1. On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est définie et continue sur $[a; b]$. Par hypothèse, $\forall x \in [a; b], a \leq f(x) \leq b$. En particulier, on a $a \leq f(a)$ et $f(b) \leq b$ ce qui se traduit par $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. On distingue les trois cas suivants :

- (i) si $g(a) = 0$ alors $x = a$ est solution de l'équation $f(x) = x$;
- (ii) si $g(b) = 0$ alors $x = b$ est solution de l'équation $f(x) = x$;
- (iii) si $g(a) < 0 < g(b)$, alors d'après le T.V.I. $\exists c \in]a; b[, g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

2. L'existence d'un point fixe est justifié à la question 1.

On démontre l'unicité par l'absurde : soit $x_1, x_2 \in [a, b]$ deux points fixes distincts de f , c'à d $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$ et $x_1 \neq x_2$. l'hypothèse sur f entraîne une absurdité :

$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2| \Rightarrow 1 < 1$$

Par conséquent $x_1 = x_2$. Il y a bien unicité du point fixe.

3. L'existence d'un point fixe est justifié à la question 1.

On démontre l'unicité par l'absurde : soit $x_1, x_2 \in [a, b]$ deux points fixes distincts de f , c'à d $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$ et $x_1 \neq x_2$. l'hypothèse sur f entraîne une absurdité :

$$\bullet \text{ soit } \boxed{x_1 < x_2} \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow \boxed{x_1 \geq x_2}$$

$$\bullet \text{ soit } \boxed{x_2 < x_1} \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow \boxed{x_2 \geq x_1}$$

Dans tous les cas on aboutit à la proposition $P \Rightarrow \text{non } P$ qui n'est vraie que si P est fausse. Par conséquent $x_1 = x_2$. Il y a bien unicité du point fixe.

4. Non, il suffit de considérer la fonction définie par $f(x) = x + 1$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow 1 = 0$$

Il n'y a aucune solution sur tout intervalle fermé non borné $[a, +\infty[$.

Pourtant on a bien $\text{Im } f = [a + 1, +\infty[\subset [a, +\infty[$.

Chapitre 4. Exercice A.2.2

1. La fonction f n'admet pas de limite en 0 donc elle n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ car elle est composée de fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il y a deux façons de montrer que f admet une limite en 0.

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, -|x| \leq f(x) \leq |x|$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

- La fonction f est le produit d'une fonction bornée (par -1 et 1) et d'une fonction qui tend vers 0 en 0 donc d'après les théorèmes de comparaison, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

On en déduit que f est prolongeable par continuité en 0 en la fonction \tilde{f} définie sur \mathbb{R} par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- On étudie la limite du taux d'accroissement en 0 de \tilde{f} .

$$\frac{\tilde{f}(0+h) - \tilde{f}(0)}{h} = \sin \frac{1}{h}$$

On a montré que ce taux d'accroissement n'admet pas de limite en 0, donc $\tilde{f}'(0)$ n'existe pas.

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ car elle est composée de fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il y a deux façons de montrer que f admet une limite en 0.

- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, -x^2 \leq f(x) \leq x^2$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

- La fonction f est le produit d'une fonction bornée (par -1 et 1) et d'une fonction qui tend vers 0 en 0 donc d'après les théorèmes de comparaison, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

On en déduit que f est prolongeable par continuité en 0 en la fonction \tilde{f} définie sur \mathbb{R} par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On verra la semaine prochaine que la deuxième fonction n'est pas dérivable en 0 alors que la troisième fonction est dérivable en 0.

- On étudie la limite du taux d'accroissement en 0 de \tilde{f} .

$$\frac{\tilde{f}(0+h) - \tilde{f}(0)}{h} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = h \sin \frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Donc $\tilde{f}'(0) = 0$.

- On peut alors s'intéresser à la continuité de la dérivée première en 0 : pour $x \neq 0$, on calcule

$$\tilde{f}'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

\tilde{f}' continue en 0 signifie $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{f}'(x) = \tilde{f}'(0)$?

On voit bien que la réponse est non car $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Chapitre 4. Exercice A.2.9

• Comme f est une application continue sur \mathbb{R} , on sait que son image $\text{Im } f$ est un intervalle. Les limites généralisées, indiquent que $\text{Im } f$ n'est ni minoré, ni majoré. Un tel intervalle est $\text{Im } f = \mathbb{R}$. Comme $0 \in \text{Im } f$, on en déduit qu' $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

• Soit p une fonction polynomiale de degré impair :

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

avec $n \in \mathbb{N}$, n impair, $a_n \neq 0$ et $(a_n, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La fonction p est continue sur \mathbb{R} .

Si $a_n > 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty.$$

D'après ce qui précède, le polynôme p admet au moins une racine.

Si $a_n < 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -p(x) = -(-\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -p(x) = -(+\infty) = -\infty.$$

D'après ce qui précède, $-p(x) = 0$ admet au moins une solution donc $p(x) = 0$ aussi. Autrement dit, le polynôme p admet au moins une racine.

Conclusion : tout polynôme de degré impair admet au moins une racine.

Énoncé hors poly. Soit f l'application définie et continue sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) =]0, 1]$.
3. Montrer que f et $f \circ f$ admettent un unique point fixe, $\alpha \in]0, 1[$. (utiliser A.2.12 Q1. et Q2.)
4. Dresser le tableau de signe de $g(x) = f \circ f(x) - x$.
5. Démontrer que la suite définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers α . (Étudier u_{2n} et u_{2n+1} .)
6. Qu'en est-il si $u_0 < 0$?