

Exercice hors poly. Extrema locaux

On admet que la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. À l'aide d'un développement limité à un ordre suffisant, montrer que $a = 0$ réalise un extremum local de f dont on précisera la nature (minimum ou maximum local).
2. (a) À l'aide du théorème de Rolle, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in]n\pi, (n+1)\pi[$ tel que $f'(c_n) = 0$.
(b) Montrer que le développement limité de f en c_n à l'ordre 2 est

$$\forall h \in \mathbb{R}, f(c_n + h) = f(c_n) - \frac{f(c_n)}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h), \quad \text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

(Indication : calculer f' et f'' ont été calculées au TP7 et justifier que $f''(c_n) = -f(c_n)$.)

- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel c_n réalise également un extremum local de f dont on précisera la nature (minimum ou maximum local).

Correction.

1. Au voisinage de $a = 0$, on a

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

Par unicité du développement limité, on lit que $f'(0) = 0$ et que $a = 0$ réalise un maximum local de f sur $\mathbb{R}$. En effet, au voisinage de $a = 0$, on a

$$f(x) - f(0) = f(x) - 1 = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(0) = 1.$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(n\pi) = f((n+1)\pi) = 0$. D'après le théorème de Rolle, $\exists c_n \in]n\pi, (n+1)\pi[, f'(c_n) = 0$.
(b) La formule de Taylor-Young fourni au voisinage de c_n le développement limité suivant :

$$f(c_n + h) = f(c_n) + f'(c_n)h + \frac{f''(c_n)}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h), \quad \text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

On sait déjà que $f'(c_n) = 0$. Calculons $f''(c_n)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \\ f''(x) &= \frac{x^2(\cos x - x \sin x - \cos x) - 2x(x \cos x - \sin x)}{x^4} \\ \Rightarrow &= \frac{-x^3 \sin x - 2(x \cos x - \sin x)}{x^3} \\ &= -f(x) - \frac{2f'(x)}{x} \end{aligned}$$

On en déduit que $f''(c_n) = -f(c_n)$ et on a bien

$$f(c_n + h) = f(c_n) - \frac{f(c_n)}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h), \quad \text{avec } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

- (c) • Si n est pair alors la fonction $\sin$ est strictement positive sur $]n\pi, (n+1)\pi[$ et $f(c_n) = \frac{\sin c_n}{c_n} > 0$. Alors,

$$f(x) - f(c_n) = -\frac{f(c_n)}{2}(x - c_n)^2 + (x - c_n)^2 \varepsilon(x - c_n) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(c_n)$$

Il s'agit d'un maximum local.

- Si n est impair alors la fonction $\sin$ est strictement négative sur $]n\pi, (n+1)\pi[$ et $f(c_n) = \frac{\sin c_n}{c_n} < 0$. Alors,

$$f(x) - f(c_n) = -\frac{f(c_n)}{2}(x - c_n)^2 + (x - c_n)^2 \varepsilon(x - c_n) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(c_n)$$

Il s'agit d'un minimum local.

Exercice A.2.26 Étude des branches infinies de $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$

On détermine entièrement l'équation de l'asymptote ainsi que la position de la courbe représentative de f par rapport à l'asymptote en passant par le développement asymptotique de $\frac{f(x)}{x}$ en $\pm\infty$:

- Changement de variable $t = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+2}{x} e^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = (1+2t)e^t$$

- On pose $g(t) = (1+2t)e^t$ et on détermine les trois 1ers termes du D.L. de g en 0 :
 $(1+2h)$ est un polynôme donc son D.L. est lui-même avec reste nul.

$$e^h = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_1(h)$$

On multiplie les parties régulières et on garde les termes de degré inférieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} g(t) &= (1+2t)\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right) + t^2\varepsilon_2(t) \\ &= 1+2t+t+2t^2+\frac{t^2}{2}+t^3+t^2\varepsilon_2(t) \\ &= 1+3t+\frac{5t^2}{2}+t^2\varepsilon_3(t) \end{aligned}$$

- On revient à la fonction f et à la variable x en utilisant $t = \frac{1}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} = g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f(x) = x + 3 + \frac{5}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right)$$

- **Conclusion** : L'équation de l'asymptote en $+\infty$ et $-\infty$ est $y = x + 3$.
Pour connaître la position de l'asymptote par rapport à la courbe, il faut étudier le signe de la différence $f(x) - y$ en fonction de $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$:

$$f(x) - y = \frac{5}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right)$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, le reste $\frac{1}{x}\varepsilon_3\left(\frac{1}{x}\right)$ est négligeable par rapport au terme $\frac{5}{2x}$

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) - y < 0 \Rightarrow$ La courbe représentative de f est située en dessous de l'asymptote

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) - y > 0 \Rightarrow$ La courbe représentative de f est située au-dessus de l'asymptote