

Chapitre 6. Exercice A.2.12

Soit

$$f(x) = 3 + \int_0^x e^{t^2} dt.$$

On note que $f(0) = 3$. La fonction f est dérivable et $f'(x) = e^{x^2}$. Comme f' est composée de exponentielle et d'un polynôme, on sait que f' (et donc f aussi) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (càd infiniment continûment dérivable). Pour obtenir le DL à l'ordre 6 au voisinage de $a = 0$ de f on va intégrer le DL à l'ordre 5 de f' :

cours : on pose $x = a + h$ et

$$f'(a+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \cdots + \alpha_n h^n + h^n \varepsilon(h) \Rightarrow f(a+h) = f(a) + \underbrace{\alpha_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + \alpha_n \frac{h^{n+1}}{n+1}}_{\text{primitive de la partie rég. de } f'} + h^{n+1} \tilde{\varepsilon}(h)$$

$$\text{et } \tilde{\varepsilon}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

- pour $a = 0$, on a $x = h$. DL de $f'(x)$:

$$e^t \underset{t \approx 0}{=} 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + t^3 \varepsilon_1(t) \text{ (les termes d'ordre supérieurs sont inutiles)}$$

On pose $t = x^2$:

$$f'(x) = e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + x^6 \varepsilon_2(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + x^5 \varepsilon_3(x)$$

On a dit que le DL à l'ordre 5 pour f' suffit pour avoir le DL à l'ordre 6 pour f . Par intégration on obtient

$$f(x) = f(0) + \underbrace{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5}_{\text{primitive de la partie rég. de } f'(x)} + x^6 \varepsilon_4(x) = 3 + \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5\right) + x^6 \varepsilon_4(x)$$

Chapitre 7. Exercice A.2.16

Quelques formules

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| \quad \text{et pour } \alpha \neq 1 \quad \int \frac{u'(x)}{(u(x))^\alpha} dx = -\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(u(x))^{\alpha-1}}$$

$$(\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

3. 1 seule I.P.P. avec $u'(x) = 1$ et $v(x) = \text{Arcsin } x$.

On calcule $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned} \int \text{Arcsin } x \, dx &= x \text{Arcsin } x + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \text{Arcsin } x + \sqrt{1-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. On a $P(x) = x^2 + x + 1$ donc $\deg P = 2$. Il faut effectuer 2 I.P.P. en dérivant le polynôme.

On pose $u'(x) = e^{2x}$ et $v(x) = x^2 + x + 1$

On calcule $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $v'(x) = 2x + 1$

$$\int (x^2 + x + 1)e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} \int e^{2x}(2x + 1) dx$$

On pose $u'(x) = e^{2x}$ et $v(x) = 2x + 1$

On calcule $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$ et $v'(x) = 2$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + x + 1)e^{2x} dx &= e^{2x} \frac{(x^2 + x + 1)}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}e^{2x}(2x + 1) - \int \frac{1}{2}e^{2x} \times 2 dx \right) \\ &= e^{2x} \frac{(x^2 + x + 1)}{2} - e^{2x} \frac{2x + 1}{4} + \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \\ &= e^{2x} \frac{2x^2 + 1}{4} + \frac{1}{4}e^{2x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= e^{2x} \frac{2x^2 + 2}{4} + C = e^{2x} \frac{x^2 + 1}{2} + C. \end{aligned}$$

5. On a $P(x) = x$ donc $\deg P = 1$. Il faut effectuer 1 I.P.P. en dérivant le polynôme.

On pose $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = x$

On calcule $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = 1$

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= -x \cos x - \int (-\cos x) \times 1 \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

6. On effectue 2 I.P.P. puis on résout une équation d'inconnue

$$G(x) = \int \sin x e^{2x} dx.$$

On pose $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = e^{2x}$

On calcule $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = 2e^{2x}$

$$G(x) = -e^{2x} \cos x + 2 \int \cos x e^{2x} dx$$

On pose $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = e^{2x}$
On calcule $u(x) = \sin x$ et $v'(x) = 2e^{2x}$

$$G(x) = -e^{2x} \cos x + 2 \left(e^{2x} \sin x - \int 2e^{2x} \sin x \right)$$

$$G(x) = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 5G(x) = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x + C$$

$$\Rightarrow G(x) = \frac{-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x + C}{5} = \frac{-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x}{5} + \tilde{C}.$$

Chapitre 7. Exercice A.2.23

1. Effectuer le changement de variable $x = \sqrt{2t+1}$ pour déterminer la forme générale des primitives de $\frac{2t}{\sqrt{2t+1}}$:

- Exprimer dt en fonction de dx

$$x = \sqrt{2t+1} \Leftrightarrow t = \frac{x^2-1}{2}$$

On "dérive l'ancienne variable par rapport à la nouvelle variable"

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d[\frac{x^2-1}{2}]}{dx} = x \Rightarrow dt = x dx$$

- On modifie l'intégrande

$$\frac{2t}{\sqrt{2t+1}} = \frac{x^2-1}{x}$$

- Transformer l'intégrale en t en une intégrale en x et terminer le calcul

$$\begin{aligned} \int \frac{2t}{\sqrt{2t+1}} dt &= \int \frac{x^2-1}{x} \times x dx \\ &= \int (x^2-1) dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x + C \\ &= \frac{(\sqrt{2t+1})^3}{3} - \sqrt{2t+1} + C \\ &= \frac{(2t+1)\sqrt{2t+1}}{3} - \sqrt{2t+1} + C \\ &= \sqrt{2t+1} \left(\frac{2t+1}{3} - 1 \right) + C \\ &= \sqrt{2t+1} \frac{2t-2}{3} + C \end{aligned}$$

2. Effectuer le changement de variable $x = \sqrt{e^t-1}$ pour déterminer la forme générale des primitives de $\frac{e^t}{(1+e^t)\sqrt{e^t-1}}$:

- Exprimer dt en fonction de dx

On "dérive l'ancienne variable par rapport à la nouvelle variable"

$$x = \sqrt{e^t-1} \Leftrightarrow e^t = x^2+1 \Leftrightarrow t = \ln(x^2+1)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d[\ln(x^2+1)]}{dx} = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow dt = \frac{2x}{x^2+1} dx$$

- On modifie l'intégrande

$$\frac{e^t}{(1+e^t)\sqrt{e^t-1}} = \frac{x^2+1}{(x^2+2)x}$$

- Transformer l'intégrale en t en une intégrale en x et poursuivre le calcul

$$\int \frac{e^t}{(1+e^t)\sqrt{e^t-1}} dt = \int \frac{x^2+1}{(x^2+2)x} \times \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{2}{x^2+2} dx$$

$$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (\text{Arctan} \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$$

$$\frac{2}{2+x^2} = \frac{2}{2} \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{2} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^t}{(1+e^t)\sqrt{e^t-1}} dt &= \int \frac{2}{x^2+2} dx \\ &= \sqrt{2} \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= \sqrt{2} \text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{e^t-1}}{\sqrt{2}}\right) + C \end{aligned}$$

Changement de variable avec $x = \varphi(t)$ dans l'intégrale

$$\int_a^b f(t) dt$$

- Changer les bornes :

$$t = a \Leftrightarrow \text{calculer } x = \varphi(a)$$

$$t = b \Leftrightarrow \text{calculer } x = \varphi(b)$$

- Exprimer dt en fonction de dx

On "dérive l'ancienne variable par rapport à la nouvelle variable"

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d[\varphi(x)]}{dx} = \varphi'(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x) dx$$

- On modifie l'intégrande

$$f(t) = f(\varphi(x))$$

- Transformer l'intégrale en t en une intégrale en x

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

Chapitre 7. Exercice A.2.24

2. Primitive de f_5 :

Soit $f_5(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$. Il faut mettre $f_5(x)$ sous la forme $f_5(x) = \alpha \times \frac{1}{1+(u(x))^2}$ où α est un réel et u est une fonction à trouver. Pour cela il faut mettre le dénominateur sous forme canonique.

$$x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.$$

Ensuite, on factorise le dénominateur par la constante apparaissant à côté du carré. Ici il s'agit de $\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \times \frac{1}{\frac{4}{3}(x - \frac{1}{2})^2 + 1} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{(\sqrt{\frac{4}{3}})^2(x - \frac{1}{2})^2 + 1} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}))^2 + 1} \end{aligned}$$

L'expression obtenue ressemble à la dérivée de $\text{Arctan } t$ à une constante près :

$$\text{Arctan}' t = \frac{1}{1+t^2}.$$

On procède au changement de variable $t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$:

- on calcule x en fonction de t : $x = \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{2}$.
- on dérive l'ancienne variable x par rapport à la nouvelle variable t :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt$$

- On transforme l'intégrand

$$\begin{aligned} \int f_5(x) dx &= \int \frac{4}{3} \times \frac{1}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2 + 1} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{t^2 + 1} \times \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan } t + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Primitive de f_6 :

Soit $f_6(x) = \frac{2-x}{x^2-x+1}$. Il faut exprimer le numérateur en fonction de la dérivée du dénominateur $v(x) = x^2 - x + 1$, c'est-à-dire trouver deux constantes α et β telles que

$$2 - x = \alpha \times v'(x) + \beta.$$

On calcule donc $v'(x) = 2x - 1$. L'égalité ci-dessus devient

$$2 - x = \alpha(2x - 1) + \beta = 2\alpha x - \alpha + \beta \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 2\alpha \\ 2 = -\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases}$$

La fraction f_6 se réécrit

$$f_6(x) = \frac{-\frac{1}{2} \times v'(x) + \beta}{v(x)} = -\frac{1}{2} \frac{v'(x)}{v(x)} + \frac{3}{2} \frac{1}{v(x)}.$$

Le premier terme est la dérivée de $\ln|v(x)|$ et le second terme correspond à la fonction f_5 (à une constante près).

$$\begin{aligned} \int f_6(x) dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{v'(x)}{v(x)} dx + \frac{3}{2} \int f_5(x) dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \sqrt{3} \text{Arctan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice hors poly

1. On définit les polynômes $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$, $Q(x) = x^2 + x + 1$.

(a) Diviser P par Q suivant les puissances croissantes (on veut un reste de valuation 3).

(b) En déduire une primitive de la fonction $\frac{x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^3(x^2 + x + 1)}$.

$$\text{Réponse : } -\frac{1}{2x^2} + 2\ln|x| - \ln(x^2 + x + 1) + C$$

2. En s'inspirant de la méthode précédente, trouver une primitive de $\frac{1}{x^4(x^2 - 2x + 2)}$.

$$\text{Réponse : } -\frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{4}\text{Arctan}(x - 1) + C.$$

Q1.

(a) Un reste de valuation 3 est un reste dont la puissance du terme de plus bas degré est égale à 3. Autrement dit, on veut un reste factorisable par x^3 .

Attention! ne pas confondre division euclidienne et division selon les puissances croissantes.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 1 \quad + \quad x \quad + \quad 3x^2 \quad + \quad x^3 \\ -1 \quad - \quad x \quad - \quad x^2 \\ \hline 2x^2 \quad + \quad x^3 \\ -2x^2 \quad - \quad 2x^3 \quad - \quad 2x^4 \\ \hline -x^3 \quad - \quad 2x^4 \end{array} & \begin{array}{l} 1 + x + x^2 \\ \hline 1 + 2x^2 \end{array} \end{array}$$

Conclusion : $P(x) = Q(x)(1 + 2x^2) - (x^3 + 2x^4)$.

(b) On cherche une primitive de $F(x) = \frac{P(x)}{x^3 Q(x)}$. Pour cela on modifie l'expression de F en utilisant le résultat précédent.

$$F(x) = \frac{Q(x)(1 + 2x^2) - (x^3 + 2x^4)}{x^3 Q(x)} = \frac{Q(x)(1 + 2x^2)}{x^3 Q(x)} - \frac{(x^3 + 2x^4)}{x^3 Q(x)} = \frac{1 + 2x^2}{x^3} - \frac{1 + 2x}{Q(x)}$$

$$\begin{aligned} \int F(x) dx &= \int \left(\frac{1 + 2x^2}{x^3} - \frac{1 + 2x}{1 + x + x^2} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} - \frac{1 + 2x}{1 + x + x^2} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{1 + 2x}{1 + x + x^2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2x^2} + 2\ln|x| - \ln(1 + x + x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{1}{2x^2} + \ln\left(\frac{x^2}{1 + x + x^2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Q2.

(a) On effectue la division de $P(x) = 1$ par $Q(x) = 2 - 2x + x^2$ avec un reste de valuation 4 (afin de simplifier la fraction par x^4 plus tard). On trouve

$$1 = (2 - 2x + x^2) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} \right) - \frac{x^4}{4}$$

(b) On cherche une primitive de $F(x) = \frac{P(x)}{x^4 Q(x)}$. Pour cela on modifie l'expression de F en utilisant le résultat précédent.

$$F(x) = \frac{Q(x)(x^2 - 2x + 2) - \frac{x^4}{4}}{x^4 Q(x)} = \frac{Q(x)(x^2 - 2x + 2)}{x^4 Q(x)} - \frac{\frac{x^4}{4}}{x^4 Q(x)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}}{x^4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

$$= \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + (x-1)^2}$$

La forme générale des primitives est

$$\int F(x) dx = -\frac{1}{6x^3} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{4} \text{Arctan}(x-1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 7. Exercice A.2.25

1.

(a) Il faut effectuer le changement de variable $x = \sin t$.

- On dérive l'ancienne variable par rapport à la nouvelle variable :

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t dt$$

- On change les bornes :

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} \\ x = -1 &\Leftrightarrow \sin t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- On transforme l'intégrale :

$$I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 t} \times \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t \times \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt$$

Pour intégrer $\cos^2 t$, il faut linéariser l'expression $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$.

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \left(-\frac{\pi}{4} + 0 \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

(b) Si $a=0$ alors $I_2 = 0$.

On suppose $a \neq 0$ et on commence par factoriser l'intégrande par $\sqrt{a^2} = |a|$ pour obtenir une expression similaire à la précédente

$$I_2 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^a \sqrt{a^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = |a| \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx$$

Ensuite on effectue le changement de variable $\frac{x}{a} = \sin t$.

- On dérive l'ancienne variable par rapport à la nouvelle variable :

$$x = a \sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a \cos t \Rightarrow dx = a \cos t dt$$

- On change les bornes :

$$\begin{aligned} x = a &\Leftrightarrow a \sin t = a \Leftrightarrow \sin t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 &\Leftrightarrow a \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \end{aligned}$$

- On transforme l'intégrale :

$$I_2 = |a| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \times a \cos t dt = a|a| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = a|a| \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a|a| \frac{\pi}{4}$$