Médian - SY01/A16, durée 2h, 4 exercices, 2 pages

Document autorisé : Formulaire manuscrit. Barème indicatif : 4.5, 5.5, 4, 6.
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (Dans cet exercice les questions sont indépendantes)

1. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes. On suppose que pour tout $1 \leq i \leq n$,
$$P\left(X_i = i^2\right) = \frac{1}{i+2},\ P\left(X_i = -i^2\right) = \frac{1}{i+2},\ P\left(X_i = 0\right) = \frac{i}{i+2}.$$
On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Déterminer la valeur de $E[S_n]$.
2. Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, peut-elle avoir une loi uniforme (c.a.d. $p_X(k) = P(X = k) = p$ où $p \in [0, 1]$, $\forall k \in \mathbb{N}$) ? Justifiez soigneusement votre réponse.
3. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi :
$$X_i(\Omega) = \{-1, 1\},\ i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et } P(X_i = 1) = \theta,\ P(X_i = -1) = 1 - \theta,\ 0 < \theta < 1.$$
Pour $k = 1, \ldots, n$, on définit la v.a. $Y_k = \Pi_{i=1}^{k} X_i$, de loi
$$P(Y_k = 1) = p_k \text{ et } P(Y_k = -1) = 1 - p_k.$$
Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de p_k en fonction de θ.
   (a) Pour $k = 1, \ldots, n$, déterminer $E[X_k]$ en fonction de θ et $E[Y_k]$ en fonction de p_k.
   (b) Pour $k = 1, \ldots, n$, déterminer $E[Y_k]$ en fonction de $E[X_1]$ et de k.
   (c) A l'aide des deux questions précédentes, déterminer la valeur de p_k en fonction de θ et de k.

Exercice 2. Pour améliorer la sûreté de fonctionnement d'un serveur informatique, on envisage d'introduire de la redondance, c'est-à-dire d'avoir plusieurs exemplaires des composants importants. On peut réaliser les opérations suivantes :

– on utilise trois alimentations de 300 Watts chacune : le serveur peut continuer à fonctionner avec une alimentation en panne car il consomme au maximum 500 Watts.

– on place les quatre disques durs en configuration RAID 5 : le serveur peut continuer à fonctionner avec un disque dur en panne.

On suppose que la probabilité de panne d'une alimentation est p et que celle d'une panne de disque dur est q. On suppose en outre que tous les composants sont indépendants.

1. Soit un serveur avec alimentations redondantes : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les alimentations ne peut tomber en panne.
2. Soit un serveur avec disques durs RAID 5 : calculer la probabilité de panne du serveur en supposant qu'aucun autre composant que les disques dur ne peut tomber en panne.
3. Si $p = q$, quelle solution de redondance est la plus intéressante ?

TOURNEZ LA PAGE !

Exercice 3. Un gardien de nuit doit ouvrir l'une des portes à contrôler pendant sa tournée, dans le noir. Il possède un trousseau de 10 clés d'allures semblables, mais une seule peut ouvrir la porte en question. L'essai des clés se fait au hasard. Le gardien dispose de deux méthodes :

- Méthode A, qui consiste à essayer chaque clé uniformément parmi les clés restantes.

- Méthode B, qui consiste à essayer une clé après avoir agité le trousseau (c'est à dire il fait un choix uniforme entre toutes les clés).

1. On appelle X_A la variable aléatoire qui désigne le nombre des clés essayées (y compris celle qui donne satisfaction) par la Méthode A. Déterminer la loi de probabilité de X_A.
2. De même, on appelle X_B la variable aléatoire analogue que l'on obtient par la méthode B. Déterminer la loi de probabilité de X_B.
3. Quelle est la probabilité d'essayer plus de 8 clés par la méthode A ? par la méthode B ?
4. Le gardien utilise la méthode A lorsqu'il est à jeûn et la méthode B lorsqu'il est ivre. Un cambrioleur caché à l'intérieur sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Quelle est la probabilité conditionnelle pour que le gardien soit ivre, sachant que les 8 premiers essais ont échoués. On notera : **A** l'événement "le gardien utilise la méthode A", **B** l'événement "le gardien utilise la méthode B" et **H** l'événement "8 essais ont échoué".

Exercice 4. Soit $p \in]0,1[$ un nombre réel. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes deux la loi géométrique de paramètre $1-p$.

1. Calculer la loi de $X+Y$, en précisant l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire $X+Y$.
2. Déterminer la valeur de l'espérance de $X+Y$?
3. Exprimer l'événement $\{X=Y\}$ à l'aide des événements $\{X=n, Y=n\}$ pour $n \geq 1$, puis calculer $P(X=Y)$.
4. Expliquer pourquoi $P(X>Y) = P(Y>X)$. En déduire la valeur de $P(X>Y)$ à l'aide de la question 3.
5. On définit la variable aléatoire Z par $Z = 1_{\{\text{ impair }\}}(X)$ (fonction indicatrice de l'ensemble des nombres impairs). Déterminer la loi de Z.