Final - SY01/A19. Durée 2 heures, 2 pages, 4 exercices.

Seul document autorisé : Formulaire manuscrit. Calculatrices interdites.
Barème indicatif : 7, 4, 4.5, 5.5.
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. Soit Y une variable aléatoire (v.a.) de loi de Bernoulli de paramètre p (notée $B(p)$). Soit X_1 (respectivement X_2) une v.a. de densité f_1 et de moyenne μ_1 (respectivement f_2 et de moyenne μ_2). On suppose que la v.a. Y est indépendante des v.a. X_i, $i \in \{1, 2\}$. On définit $X = YX_1 + (1 - Y)X_2$.
   (a) Exprimer la fonction de répartition de X en fonction de p et des fonctions de répartition de X_1 et de X_2.
   (b) Exprimer $E[X]$ en fonction de p, μ_1 et μ_2.
2. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $E(\frac{1}{\lambda})$ avec $\lambda > 0$, i.e. admettant la densité f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} 1_{]0,+\infty[}(x).$$

   (a) Calculer la fonction de répartition F de X.
   (b) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(X \leq x | a < X < b)$.
3. Soient $X_1, \ldots, X_{1000}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $]0, 1[$. Soit M le nombre d'entre elles comprises entre $1/4$ et $3/4$.
   Indication $\Phi(4/\sqrt{10}) \approx 0.8962$.
   (a) Déterminer la loi de M.
   (b) Déterminer par approximation normale $P(|M - 500| > 20)$. Justifier votre réponse.

Exercice 2. On suppose que le nombre de blessés arrivant à un service des urgences un jour donné suit la loi de Poisson de moyenne 6. Sachant que les victimes potentielles sont réparties équitablement entre les deux sexes, on note X le nombre de femmes qui figurent parmi les blessés et Y le nombre d' hommes.

a- On note $n \geq 0$ le nombre de personnes arrivées aux services des urgences et k le nombre de femmes.
Calculer $P(X = k | X + Y = n)$. De quelle loi s'agit-il ?

b- Etablir les lois de probabilités de X et Y.

c- Donner l'espérance mathématique de X et Y, ainsi que leurs écarts-types.

d- Evaluer $P(X = k,\ X + Y = k + h)$, et en déduire que X et Y sont indépendantes.

e- Quel type d' événement(s) nous permettrait de calculer la probabilité qu'il y ait autant d'hommes que de femmes admis aux urgences ? (On ne demande pas de faire des calculs !)

Tournez la page !

Exercice 3. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi absolument continue dont la densité f est donnée par
$$f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(4x^2+2xy+y^2)}, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Indication : On pourra utiliser la densité d'une v.a. de loi $N(m, \sigma^2)$.

1. Déterminer la densité f_X de la v.a. X. En déduire le nom et les caractéristiques de la loi de X.
2. Déterminer la densité f_Y de la v.a. Y. En déduire le nom et les caractéristiques de la loi de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$. On pose $U = X + Y$ et $V = XY$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V), on indiquera l'ensemble de valeurs que le couple (U, V) peut prendre.
2. En déduire les lois marginales de U et V.
3. Calculer de deux manières différentes l'espérance de U notée $E[U]$), ainsi que celle de V, notée $E[V]$.
4. Calculer $Cov(U, V)$. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?