Université de Technologie de Compiègne

MT12 - Novembre 2023- Médian
Durée : 1h30.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (6 points)

1. Soit $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b < +\infty$). On considère l'application

$$\begin{aligned} <\cdot,\cdot>: \quad & E\times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (f,g) \longrightarrow <f,g> = \int_a^b f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que cette application définie un produit scalaire sur E, en indiquant sa norme associée.

   (b) En déduire que

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Soit f une fonction dérivable définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f' vérifie la propriété suivante :

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq M, \quad \text{avec } M \text{ une constante positive.}$$

   On considère pour un entier naturel $N \geq 1$ les points $x_k = \frac{k}{N}$, pour $k = 0,\cdots,N$ et on note

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k).$$

   (a) Quelle est la valeur de $I = \lim_{N\to+\infty} S_N$? Justifier.

   (b) Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$|I - S_N| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{N}}$$

   en précisant la valeur de α.
   Indication : Penser à utiliser la question (1)-b.

3. On considère pour $0 \leq x \leq 1$ la fonction suivante $f(x) = x\sin(\pi x)$.

   (a) Calculer

$$\int_0^1 x\sin(\pi x)dx.$$

   (b) En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k}{N^2}\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right).$$

Exercice 2. (3 points)

1. Soit f une fonction 2π-périodique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et continue par morceaux. On suppose qu'il existe deux constantes $A > 0$ et $B > 0$ telles que, pour tous $x,y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq A\,|x-y|^B.$$

   (a) Pour $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, exprimer l'intégrale suivante

$$\int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)e^{-inx}dx$$

   en fonction des coefficients de Fourier $c_n(f)$.

   (b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, on a

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^B}.$$

Tournez la page S.V.P

Exercice 3. (11 points)

1. Soit f la fonction impaire et 2π-périodique définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad \text{si} \quad x \in]0, \pi[.$$

   (a) Montrer que $f(0) = 0$.

   (b) Représenter f graphiquement.

   (c) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

   (d) Y-a-t-il convergence ponctuelle de la somme partielle des séries de Fourier vers f sur $\mathbb{R}$? Justifier.

   (e) Y-a-t-il convergence uniforme de la somme partielle des séries de Fourier vers f sur $\mathbb{R}$? Justifier.

   (f) Déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2. On suppose désormais que $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que g est une fonction paire.

   (b) Exprimer les coefficients de Fourier de g en fonction de ceux de f. En déduire $a_n(g)$ et $b_n(g)$.

   (c) Déterminer la valeur de la somme suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}.$$

   (d) En déduire l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}.$$

Rappel

1. Coefficients de Fourier : Soit f une fonction continue par morceaux T-périodique, alors les coefficients de Fourier de f sont définis comme suit :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-i\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)} dx, \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx, \quad \text{pour} \quad n \geq 0$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx. \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

2. Égalité de Parseval : Soit f une fonction continue par morceaux T-périodique, alors on l'égalité suivante :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx = \frac{(a_0(f))^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2).$$

3. Formules trigonométriques :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)), \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)), \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$