Université de Technologie de Compiègne

MT12 - Janvier 2024-Final
Durée : 2h00.
Les documents et calculatrices sont interdits
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. (4 points)

1. Soit f une fonction positive non-nulle définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si f est une fonction croissante alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ ne converge pas.
   (b) Montrer que si f est une fonction croissante alors $f \notin L^1(\mathbb{R})$.
   (c) Monter que si f est fonction décroissante alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ converge si et seulement si $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$.
2. Soit β un réel positif. On considère la série suivante $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta}(n)}$.
   (a) Pour quelles valeurs de β la série précédente est convergente ? Justifier votre réponse.
   (b) Pour quelles valeurs de β la série précédente est divergente ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. (5,5 points)

1. On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction suivante :
$$f(x) = e^{-2\pi|x|}.$$
   (a) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que le produit de convolution $(f \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) f(x-y) dy$ est bien défini.
   (c) Montrer que la fonction $f \star f$ est paire et calculer cela explicitement.
   (d) Calculer la transformée de Fourier de f.
   (e) En déduire la transformée de Fourier de $f \star f$.
2. On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction suivante :
$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
   (a) La fonction g appartient-elle à $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$? Justifier.
   (b) Calculer la transformée de Fourier de g.
   (c) Calculer la transformée de Fourier de la fonction suivante :
$$h(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}.$$
   (d) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $xh(x)$.

Exercice 3. (6,5 points)

1. On considère pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ la fonction suivante :
$$f(x) = e^{-2x} - e^{-x}.$$
   (a) Montrer que f' est une fonction bornée.
   (b) En déduire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que
$$|f(x)| \leq \alpha |x| \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^+,$$
   en précisant la valeur de α.
   (c) Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Calculer l'intégrale suivante
$$\int_0^{+\infty} e^{(-a+ib)x} dx$$

Tournez la page S.V.P

(d) En déduire

$$\int_0^{+\infty} f(x)\sin(bx)dx.$$

2. On considère pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'intégrale à paramétrer suivante :

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\cos(tx)dx$$

(a) Justifier que F est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
(c) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, en donnant l'expression de $F'(t)$.
(d) En déduire une expression simplifiée de $F(t)$, définie à une constante prés, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(e) Montrer que pour tout $t \neq 0$, il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$|F(t)| \leq \frac{\beta}{|t|},$$

en précisant la valeur de β.
(f) En déduire $\lim_{t\to+\infty} F(t)$ ainsi que la forme générale de $F(t)$.

Exercice 4. (4 points) On considère pour $0 < \alpha < 1$, l'échantillon N-périodique suivant

$$f_k^\alpha = \alpha^k \qquad k = 0, \cdots, N-1.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier discrets associés à cet échantillon.
2. Écrire l'égalité de Parseval dans ce cas.
3. On considère pour $0 < \beta < 1$, l'échantillon suivant

$$g_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_{k-j}^\alpha f_j^\beta \qquad k = 0, \cdots, N-1.$$

Calculer les coefficients de Fourier discrets associés à cet échantillon.

Rappel

1. Transformée de Fourier : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f par la fonction suivante :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx.$$

2. Transformée de Fourier inverse : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier inverse de f par la fonction suivante :

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi.$$

3. Coefficients de Fourier discrets : Soit $f = (f_0, f_2, \cdots, f_{N-1})$ un échantillon N-périodique de $\mathbb{C}^N$, alors les coefficients de Fourier discrets de f sont définis comme suit :

$$c_n^N(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi in\frac{k}{N}} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, \cdots, N-1.$$

4. Égalité de Parseval discrète : Soit $f = (f_0, f_2, \cdots, f_{N-1})$ un échantillon N-périodique de $\mathbb{C}^N$, alors on l'égalité suivante :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|f_k|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}|c_n^N(f)|^2$$

5. Développement limité : La fonction e^u admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 1, qui s'écrit de la manière suivante :

$$e^u = 1 + u + u\epsilon(u) \qquad \text{avec} \quad \lim_{u\to 0}\epsilon(u) = 0.$$

6. <u>Formules trigonométriques</u> :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)), \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)), \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \quad \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \quad \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a).$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$