## Exercices du TD Chapitre 2

ETD-2-7 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. telle que $X_n \sim B(n;p_n)$ et $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda \in ]0,+\infty[$. Montrer que lorsque $n \to +\infty$, la loi de $X_n$ converge vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

**Corrigé:** Pour $k \in \{0,\ldots,n\}$,

$$P(X=k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^k (1-p_n)^n$$

bien remarquer que dans la dernière égalité on regroupe suivant les mêmes puissances. Or pour $n$ assez grand (on note $n >> 0$), $p_n \approx \frac{\lambda}{n}$, ainsi

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^k (1-p_n)^n \approx \frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{\lambda}{n}}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

en simplifiant $n!$ et $(n-k)!$ et en mettant le $n^k$ comme dénominateur après la simplification, on a

$$= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}{n^k}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{1-\frac{\lambda}{n}}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

Bilan

$$\frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}{n^k} \longrightarrow 1,\ \text{lorsque } n\to\infty,$$

$$\left(\frac{\lambda}{1-\frac{\lambda}{n}}\right)^k \longrightarrow \lambda^k,\ \text{lorsque } n\to\infty,$$

et

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-\lambda},\ \text{lorsque } n\to\infty.$$

Conclusion, dans les conditions de lénoncé, lorsque $n \to \infty$

$$P(X=k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \longrightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}(= P(Y=K) \text{ et } Y \sim \mathcal{P}(\lambda)).$$

Dans la pratique lorsque $p$ est très petit par rapport à $np$ qui est très petit par rapport à $n$ (on note $p << np << n$), on peut approcher la loi $B(n,p)$ par la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.