Médian - SY01/A18. Durée 2 heures, 2 pages, 5 exercices.

Seul document autorisé : Formulaire manuscrit.
Barème indicatif : ...
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule. Si elle est rouge, il gagne 10e (10 euros), si elle est jaune, il perd 5e, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans remettre celle tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8e, sinon il perd 4e.
Notation : $R_i = \{$ la boule tirée au i-ème tirage est rouge$\}$, $i \in \{1, 2\}$, et ainsi de suite avec les autres couleurs.
Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain (en euros) du joueur (un perte est compté négativement).

1. Etablir la loi de probabilité de la variable X.
   Corrigé. La variable aléatoire X peut prendre des valeurs dans $X(\Omega) = \{-5, -4, 8, 10\}$. On a $P(X = -5) = P(J_1) = \frac{2}{7}$, $P(X = -4) = P(V_1 \cap \bar{R_2}) = P(V_1)P(\bar{R_2}|V_1) = \frac{4}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{21}$, $P(X = 8) = P(V_1 \cap R_2) = P(V_1)P(R_2|V_1) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{21}$ et $P(X = 10) = P(R_1) = \frac{1}{7}$.
2. Calculer l'espérance de X.
   Corrigé. $E[X] = -5 \times \frac{2}{7} - 4 \times \frac{10}{21} + 8 \times \frac{2}{21} + 10 \times \frac{1}{7}$.
3. Tracer la fonction de répartition de la v.a. X.
   Corrigé.
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < -5, \\ \frac{2}{7}, \text{ si } -5 \leq x < -4, \\ \frac{16}{21}, \text{ si } -4 \leq x < 8 \\ \frac{18}{21}, \text{ si } 8 \leq x < 10 \\ 1 \text{ si } x \geq 10. \end{cases}$$
4. Les conditions de jeux restent identiques, sauf les 8e qui sont remplacés par un gain a. Indiquer le montant du gain a qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.
   Corrigé. $E[X] = -5 \times \frac{2}{7} - 4 \times \frac{10}{21} + a \times \frac{2}{21} + 10 \times \frac{1}{7} = 0 \iff a = 20e$.

Exercice 2. Un troupeau de n chèvres dispose d'un pré et de 2 abris A et B pouvant chacun contenir tout le troupeau. Chacune des chèvres va indifféremment (avec la même probabilité donc) dans le pré, dans l'abri A ou dans l'abri B. On appelle Y la variable aléatoire désignant, à un instant donné, le nombre de chèvres dans A et Z la variable aléatoire désignant le nombre d'abris vides.

1. Déterminer la loi de Y.
   Corrigé. Pour chacune des n chèvres, la probabilité d'aller dans A est $1/3$ donc Y suit la loi binomiale $B(n, 1/3)$, ainsi $P(Y = k) = C_n^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$, si $0 \leq k \leq n$.
2. Si $n = 45$, par quelle loi peut-on approcher cette loi ?
   Corrigé. Si $n = 45$, $n \times 1/3 = 15$ et on peut approcher la loi par la loi de Poisson $\mathcal{P}(15)$.
3. Déterminer $P(Y = k \cap Z = 2)$. Indication : distinguer les cas $k = 0$ et $k \neq 0$.
   Corrigé. Si $Z = 2$, les 2 abris sont vides donc toutes les chèvres sont dans le pré : $P(Y = k \cap Z = 2) = 0$ si $k \geq 1$ et $P(Y = 0 \cap Z = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

4. Déterminer $P(Y = k \cap Z = 1)$. Indication : distinguer les cas $k = 0$ et $k \neq 0$
   Corrigé. Si $Z = 1$, un seul abri est vide donc $P(Y = k \cap Z = 1) = \frac{C_n^k}{3^n}$ si $k \neq 0$ (k chèvres dans A, le reste dans le pré) et $P(Y = 0 \cap Z = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
5. Déterminer $P(Y = k \cap Z = 0)$. Indication : distinguer les cas $k = 0$ et $k \neq 0$.
   Corrigé. Si $Z = 0$, aucun abri n'est vide donc $P(Y = 0 \cap Z = 0) = 0$ si $k = 0$ et $P(Y = k \cap Z = 0) = C_n^k \left(\frac{2^{n-k}-1}{3^n}\right)$ si $k \neq 0$.
6. En déduire la loi de Z.
   Aide : $\sum_{k=1}^n C_n^k = \sum_{k=0}^n C_n^k - 1 = 2^n - 1$.
   Corrigé. $P(Z = 2) = P(Y = 0 \cap Z = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   $P(Z = 1) = \sum_{k=0}^n P(Y = k \cap Z = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2^n-1}{3^n} = 2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.
   $P(Z = 0) = \sum_{k=1}^n P(Y = k \cap Z = 0) = \frac{3^n-2^n-2^n+1}{3^n} = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
7. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?
   Corrigé.
   $$P(Y = 1 \cap Z = 2) = 0 \neq P(Y = 1)P(Z = 2),$$
   Y et Z ne sont pas indépendantes.

Exercice 3. On effectue une suite de tirages successifs avec remise dans une urne contenant des jetons gagnants (portant le numéro 1), en proportion p ($0 < p < 1$), et des jetons perdants (portant le numéro 0), en proportion $q = 1 - p$.
Notation : $A_k = \{$ le k-ième jeton est gagnant $\}$.

1. On note N_1 (respectivement N_0) la variables aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le premier jeton gagnant (resp. perdant).
   (a) Quelles sont les lois des variables N_1 et N_0 ?
   Corrigé. $N_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\{N_1 = A_1\}$ et pour $k \geq 2$, $\{N_1 = k\} = \{\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k\}$. Comme les tirages avec remise sont indépendants, on a alors $P(N_1 = k) = q^{k-1}p$. De même pour N_0, en échangeant les rôles de p et q. D'où N_1 suit la loi $G(p)$ et N_0 la loi $G(q)$.
   (b) Les variables N_1 et N_0 sont-elles indépendantes ?
   Corrigé. Non, car par exemple $P(N_1 = 1, N_0 = 1) = 0$ car on ne peut pas à la fois avoir un jeton gagnant et perdant, et $P(N_1 = 1) = p$, $P(N_0 = 1) = q$.
2. Soit X la longueur de la première série et Y la longueur de la deuxième série. Par exemple pour la suite 111001011 on a $X = 3$ et $Y = 2$. Remarque la première série peut aussi commencer par 0 et le deuxième par 1.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
   Corrigé. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\{X = k\}$ signifie que les k premiers jetons sont gagnants et le $(k+1)$-ième perdant ou bien que les k premiers jetons sont perdants et le $(k+1)$-ième gagnant. Ainsi
   $$\{X = k\} = \{A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap \bar{A}_{k+1}\} \cup \{\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_k \cap A_{k+1}\}$$
   et $P(X = k) = p^k q + q^k p$, si $k \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Calculer l'espérance de X.
   Corrigé.
   $$E[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) = p \sum_{k=1}^{+\infty} kqp^{k-1} + q \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} = pE[N_0] + qE[N_1]$$
   $$= \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} = \frac{1-2p+2p^2}{p(1-p)}.$$

Remarque : nous avons utilisé que $E[N_0] = \frac{1}{q}$ et $E[N_1] = \frac{1}{p}$, résultats connus pour la loi Géométrique.

Exercice 4. Un système S est formé de trois composants, soit c_1, c_2 et c_3. Son bon fonctionnement est assuré si c_1 est en bon état et l'un de deux autres composants c_2, c_3, au moins, est en bon état. Les probabilités de panne de composants sur une période de test du système sont p_1, p_2 et p_3 respectivement. Les éventuelles pannes des composants sont indépendantes les unes des autres.
On utilisera les événements suivants :

$$\{C_i = 0\} = \{\text{le composant } c_i \text{ est en panne}\}; \ \{C_i = 1\} = \{\text{le composant } c_i \text{ fonctionne}\}$$

$$\{S = 0\} = \{ \text{ le système } S \text{ est en panne}\}; \ \{S = 1\} = \{ \text{ le système } S \text{ fonctionne}\}.$$

1. A partir de l'événement $\{S = 0\}$, déterminer la probabilité de panne du système, notée p_{S0}, sur la période du test en fonction de p_1, p_2 et p_3.
   Corrigé : $\{S = 0\} = \{C_1 = 0 \cup (C_2 = 0 \cap C_3 = 0)\}$, ainsi le calcul direct de la probabilité de panne est : $p_{S0} = P(C_1 = 0 \cup (C_2 = 0 \cap C_3 = 0))$
   $= P(C_1 = 0) + P(C_2 = 0 \cap C_3 = 0) - P(C_1 = 0, C_2 = 0 \cap C_3 = 0)$
   $= P(C_1 = 0) + P(C_2 = 0)P(C_3 = 0) - P(C_1 = 0)P(C_2 = 0)P(C_3 = 0)$
   $= p_1 + p_2p_3 - p_1p_2p_3$. On a utilisé l'indépendance des événements deux à deux.
2. A partir de l'événement $\{S = 1\}$, déterminer la probabilité de panne du système, sur la période du test en fonction de p_1, p_2 et p_3.
   Corrigé : En passant par l'événement $\{S = 1\}$, le calcul de p_{S0} est :
   $p_{S0} = 1 - P(C_1 = 1 \cap (C_2 = 1 \cup C_3 = 1))$
   $= 1 - P(C_1 = 1) \times (P(C_2 = 1) + P(C_3 = 1) - P(C_2 = 1, C_3 = 1))$
   $= 1 - P(C_1 = 1)P(C_2 = 1) + P(C_1 = 1)P(C_3 = 1) - P(C_1 = 1)P(C_2 = 1)P(C_3 = 1)$
   $= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) + (1 - p_1)(1 - p_3) - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)$
   $= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2 + 1 - p_3 - 1 + p_3 - p_2 - p_2p_3)$
   $= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2p_3)$
   $= 1 - 1 + p_2p_3 + p_1 - p_1p_2p_3$
   $= p_1 + p_2p_3 - p_1p_2p_3$.
3. Sachant que le système est tombé en panne, quelle est la probabilité que celle-ci ait été provoquée par la panne du composant c_1 ?
   Corrigé : La probabilité recherchée est $P(C_1 = 0|S = 0)$.
   Il suffit ensuite d'écrire la définition de la formule de Bayes et d'utiliser le fait que C_1 est en panne implique nécessairement la panne du système : $P(C_1 = 0|S = 0) = \frac{P(S=0|C1=0)P(C1=0)}{P(\text{ panne })} = \frac{1 \times P(C_1=0)}{p_{S0}} = \frac{p_1}{p_1+p_2p_3-p_1p_2p_3}$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. On définit la variable aléatoire $Y = 2^{-X}$. Calculer l'espérance de Y.
   Corrigé.
   $$E[Y] = E[2^{-X}] = \sum_{n\geq 0} 2^{-n}P(X = n) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n\geq 0}\frac{(\lambda/2)^n}{n!} = e^{-\lambda/2}.$$
2. Déterminer la loi de la v.a. Y de la question précédente.
   Corrigé. $Y(\Omega) = \{2^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$ et
   $$P(Y = 2^{-n}) = P(2^{-X} = 2^{-n}) = P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}.$$

3. On définit la variable aléatoire $Y' = (-2)^{-X}$. Calculer l'espérance de Y'.
Corrigé.

$$E[Y'] = E[(-2)^{-X}] = \sum_{n\geq 0}(-2)^{-n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n\geq 0}\frac{(-\lambda/2)^n}{n!} = e^{-3\lambda/2}.$$

4. On définit la variable aléatoire

$$Z = \begin{cases} X/2 \text{ si } X\text{est pair,} \\ (1-X)/2, \text{ si } X\text{est impair.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Z.
Indication : On pourra remarquer que Z peut prendre des valeurs dans $\mathbb{Z}$.
Notation : Pour $p \in \mathbb{Z}$, on désignera par $2p$ un entier pair et par $1-2p$ un entier impair.
Corrigé. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$P(Z = p) = P(Z = p, X \text{ pair}) + P(Z = p, X \text{ impair})$$

soit

$$P(Z = p) = P(X = 2p) + P((1-X)/2 = p \text{ impair}) = P(X = 2p) + P(X = 1-2p \text{ impair}).$$

Or

$$P(X = 2p) = \begin{cases} 0 \text{ si } p < 0, \\ \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2p}}{(2p)!}, \text{ sinon .} \end{cases}$$

Et

$$P(X = 1-2p) = \begin{cases} 0 \text{ si } 1-2p < 0, i.e. p \geq 1 \\ \frac{e^{-\lambda}\lambda^{1-2p}}{(1-2p)!}, \text{ sinon .} \end{cases}$$

Ainsi

$$P(Z = p) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{1-2p}}{(1-2p)!}, \text{ si } p < 0, \\ \frac{e^{-\lambda}\lambda^{1-2p}}{(1-2p)!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2p}}{(2p)!} = e^{-\lambda}(\lambda+1), \text{ si } p = 0, \\ \frac{e^{-\lambda}\lambda^{2p}}{(2p)!}, \text{ si } p > 0. \end{cases}$$