Corrigé du Médian - SY01/A20.

Exercice 1. Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. On place dans un sac 5 billets de 5 €, 7 billets de 10 € et 10 billets de 20 €. On prends au hasard une poignée de 8 billets, chaque billet ayant la même probabilité d'être pris.

   Quelle est la probabilité de n'avoir pris aucun billet de 5 € ?

   Notation : On notera $A = \{$ n'avoir aucun billet de 5 €$\}$

   Corrigé : Une façon de faire est de considérer les billets discernables. Ainsi $B = \{c_1, \dots, c_5, d_1, \dots, d_7, v_1, \dots, v_{10}\}$ où $c_i, i \in \{1, \dots, 5\}$ désigne chaque billet de 5 €. On en fait de même pour les billets de **d**ix et de **v**ingt €. Ainsi Ω est constitué des tous les ensembles de 8 billets distincts, soit donc $\Omega = \{(b_1, \dots, b_8); \forall i, b_i \in B \text{ et } \forall j \neq i,\ b_i \neq b_j)\}$, ainsi on a $|\Omega| = C_{22}^8$. On aurait aussi pu dire aussi que $A = \{$ avoir uniquement des billets de 10 et de 20 €$\}$, ainsi $P(A) = \frac{C_{17}^8}{C_{22}^8}$.

2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi géométrique $G(a)$. Déterminer $P(X = Y)$.

   Corrigé :

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)P(Y = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a^2(1-a)^{2(k-1)} = a^2 \sum_{k=1}^{\infty} ((1-a)^2)^{k-1} = \frac{a^2}{1-(1-a)^2} = \frac{a}{2-a}.$$

3. Soit Z une variable aléatoire de loi

$$P(Z = k) = ck^2 \frac{\lambda^k}{k!}$$

   avec $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et pour une constante c convenable.

   (a) Déterminer la valeur de c. Indication : On pourra utiliser le fait que $k^2 = k(k - 1 + 1)$.

   Corrigé : c est positive et la somme des probabilités doit donner 1, ainsi

$$c\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = c\lambda \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} = c\lambda \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} \right) = c\lambda(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda})$$

   d'où $c = \frac{1}{e^{\lambda}(\lambda^2+\lambda)}$.

   (b) Déterminer la fonction génératrice de Z.

   Corrigé : $g_Z(u) = c\sum_{k=0}^{\infty} ck^2 \frac{(u\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(u-1)} u \frac{\lambda u+1}{\lambda+1}$ Même démarche que précédemment et en remplaçant c par sa valeur.

   (c) Calculer l'espérance de Z.

   Corrigé : $g_Z'(u) = \frac{e^{\lambda(u-1)}}{(\lambda+1)}(\lambda^2u^2 + 3\lambda u + 1)$, d'où $g_Z'(1) = \frac{\lambda^2+3\lambda+1}{(\lambda+1)}$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de densité

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad -1 \leq x < 0, \\ 1-x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la fonction de répartition F_X.

   Corrigé.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1, \\ \int_{-1}^{x}(1+t)dt = \frac{(1+x)^2}{2} & \text{si} \quad -1 \leq x < 0, \\ \int_{-1}^{0}(1+t)dt + \int_{0}^{x}(1+t)dt = 1 - \frac{(1-x)^2}{2} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

   Corrigé. Comme f_X est paire, on a

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_{-1}^{0} x f_X(x)dx + \int_{0}^{1} x f_X(x)dx = -\int_{0}^{1} x f_X(x)dx + \int_{0}^{1} x f_X(x)dx = 0.$$

   Comme X est une variable aléatoire centrée $Var(X) = E[X^2]$ et

$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2 f_X(x)dx + \int_{0}^{1} x^2 f_X(x)dx = 2\int_{0}^{1}(x^2 - x^3)dx = \frac{1}{6}.$$

3. Calculer $P\left(X \leq \frac{1}{4},\ X^2 \leq \frac{1}{4}\right)$.

   Corrigé.

$$P\left(X \leq \frac{1}{4},\ X^2 \leq \frac{1}{4}\right) = P\left(X \leq \frac{1}{4},\ \frac{-1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{-1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}\right) = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{4}} f_X(x)dx$$

$$= F_X(1/4) - F_X(-1/2) = 1 - \frac{9}{32} - \frac{4}{32} = \frac{19}{32}.$$

4. Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire $Y = X^2$. Puis, en déduire la densité de Y.

   Corrigé. La variable aléatoire Y est à valeurs dans $[0,\ 1]$. Pour tout $y \geq 0$, on a

$$P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}),\ (y \geq 0)$$

   Par dérivation on a $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$, comme on connaît l'expression de la densité de X, on a finalement

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{y}}{\sqrt{y}} & \text{si} \quad 0 < y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon }. \end{cases}$$

5. Déterminer $P(|X| \geq a)$.

Corrigé :

$$P(|X| \geq a) = P(X < -a) + P(X > a) = 2(1 - F_X(a)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > 1, \\ 2(1 - (\frac{1}{2} + a - \frac{a^2}{2})) = (a-1)^2 & \text{si} \quad 0 \leq a \leq 1. \end{cases}$$

Exercice 3. La probabilité d'observer une maladie dans une population est p. Cette maladie peut être détectée sans erreur par un dosage sanguin. On souhaite déterminer par ce dosage le nombre de personnes malades sur un échantillon de 100 personnes. Mais au lieu de tester le sérum de chaque individu, on partitionne au hasard l' échantillon en 10 groupes de 10 personnes dont on mélange les sérums. Si le test est négatif, sur l'un de ces mélanges, on considère que les 10 personnes correspondantes sont toutes négatives et l'on est ainsi dispensé des 10 tests individuels. Si au contraire, le test est positif, c'est qu'alors au moins une personne est atteinte de la maladie et il faut tester séparément chacun des 10 sérums ayant participé au mélange, on doit donc, dans ce cas, effectuer 10 tests supplémentaires.

1. Trouver les probabilités que, dans un groupe, on observe :
   (a) aucune personne malade,

   Corrigé : On définit les variables indépendantes et de même loi $X_i = 1,$ si i-ème personne malade, $X_i = 0,$ sinon . D'où $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ suit la loi $B(10, p)$ et $P(X = 0) = (1-p)^{10}$.

   (b) une et une seule personne malade,

   Corrigé : $P(X = 1) = 10p(1-p)^9$.

   (c) au moins une personne malade.

   Corrigé : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{10}$.

2. Soit N le nombre total de tests à effectuer avec cette méthode de partition d'un échantillon de 100 personnes.
   (a) Quelle est la loi de la v.a. X définissant le nombre de groupes pour lesquels il faut faire 10 tests supplémentaires ?

   Corrigé : En définissant les variables de même loi et indépendantes $X_i = 1$ si ième groupe test positif, 0 sinon . On définit la v.a. $X =$ Nombre de groupes pour lesquels il faut faire 10 tests par $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ suit la loi $B(10, 1-(1-p)^{10})$, où $1-(1-p)^{10}$ est la probabilité d'au moins un malade dans le i-ème groupe (ou bien de test positif).

   (b) Exprimer la v.a. N en fonction de X.

   Corrigé : Pour $k = 0, \cdots, 10$ $\{X = k\} = \{N = 10(k+1)\}$, donc $N = 10(X+1)$.

   (c) Déterminer $P(N = 110)$.

   Corrigé : $P(N = 10) = P(X = 10) = (1-(1-p)^{10})^{10}$.

(d) Déterminer $P(N = 100)$.

Corrigé : $P(N = 100) = P(X = 9) = 10(1 - (1-p)^{10})^9(1-p)^{10}$.

3. Calculer le nombre moyen de tests $E[N]$ et la variance du nombre des tests $Var(N)$.

   Corrigé : $E[N] = E[10(X+1)] = 10(E[X]+1) = 10(10(1-(1-p)^{10}+1)$ et $Var(N) = Var(10(X+1))) = 100Var(X) = 1000(1-(1-p)^{10})(1-p)^{10}$.

4. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles, en moyenne, la méthode de partitionnement offre plus d'intérêt que la méthode qui consiste à tester les 100 individus.

   Corrigé : Il suffit de comparer $E[N]$ et 100, ainsi $E[N] < 100$, lorsque $p < 1 - (0.1)^{1/10}$.