Corrigé Final - SY01/A17. Durée 2 heures, 2 pages, 4 exercices.

Seul document autorisé : Formulaire manuscrit. Calculatrices interdites.
Barème indicatif : 6, 4, 5, 6.

Exercice 1. Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $N(0,1)$. On définit $Z = X + Y$.
   (a) Déterminer la loi du couple (X, Z).
   Corrigé : On trouve $(X,Z) = (X, X+Y)$ de densité $\frac{1}{2\pi}e^{\frac{-x^2}{2}}e^{\frac{-(z-x)^2}{2}}$, avec $|J| = 1$.
   (b) Rappeler (sans calculs) la loi de Z.
   Corrigé : La va Z a pour loi $N(0,2)$ (démontré dans le cours),
   (c) En déduire la loi conditionnelle de X sachant $\{Z = z\}$.
   Corrigé : La loi de X conditionnellement à $\{Z = z\}$ a pour densité $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{-x^2-(z-x)^2}{2}+\frac{z^2}{4}}$ et l'exposant s'écrit $-(x^2 - zx + z^2/4) = -(x - \frac{z}{2})^2$, donc c'est la loi $N(\frac{z}{2}, \frac{1}{2})$.
2. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = X + n^2 1_{\{X \leq \frac{1}{n}\}}$.
   (a) Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(|X_n - X| > \epsilon)$.
   Corrigé : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$P(|X_n - X| > \epsilon) = P\left(n^2 1_{\{X \leq \frac{1}{n}\}} > \epsilon\right) = \begin{cases} 0, \text{ si } \epsilon \geq n^2, \\ P\left(X \leq \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \text{ si } \epsilon < n^2. \end{cases}$$
   (b) Déterminer le type de convergence, ainsi que la limite de la suite $(X_n)_{n>0}$.
   Corrigé : D'après la question précédente $\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$, donc $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers X.
3. Soit X de loi uniforme sur $[0,1]$ et Y de loi exponentielle de paramètre 1 ; X et Y sont indépendantes. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $U = X + Y$, puis en déduire sa densité.
   Corrigé.
$$F_U(t) \begin{cases} 0, \text{ si } t \leq 0 \\ \int_0^{\min(1,t)} \int_0^{t-x} f_{(X,Y)}(x,y)dydx = \min(1,t) - e^{-t}(e^{\min(1,t)} - 1), \text{ sinon}, \end{cases}$$
   soit
$$F_U(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t \leq 0 \\ t - 1 + e^{-t}, \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ 1 - e^{1-t} + e^{-t}, \text{ si } t > 1. \end{cases} \quad \text{Ainsi } f_U(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-t}(e-1), \text{ si } t > 1. \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $\alpha \in]0;1[$ et (X,Y) un couple de variables aléatoires entières dont la loi est donnée par
$$P(X = i, Y = j) = \alpha^{i+j}(1-\alpha)^2, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

1. Donner la loi de X et la loi de Y.
Corrigé : Le problème est symétrique en X et en Y. Par exemple pour X : pour tout $i \geq 0$,

$$P(X = i) = \sum_{j \geq 0} P(X = i, Y = j) = (1-\alpha)^2 \alpha^i \sum_{j \geq 0} \alpha^j = (1-\alpha)\alpha^i$$

Donc X et Y sont toutes deux de loi géométrique de paramètre $1-\alpha$.

2. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?
Corrigé : Les v.a. X et Y sont indépendantes car pour tous $i, j \geq 0$

$$P(X = i, Y = j) = (1-\alpha)^2 \alpha^{i+j} = (1-\alpha)\alpha^i (1-\alpha)\alpha^j = P(X = i)P(Y = j).$$

3. Déterminer la loi de $X + Y$.
Corrigé : Pour tout $n \geq 0$,

$$P(X + Y = n) = \sum_{i=0}^{n} P(X = i, Y = n - i) = \sum_{i=0}^{n} (1-\alpha)^2 \alpha^n = (n+1)(1-\alpha)^2 \alpha^n.$$

4. Pour $n \geq 0$, déterminer la loi de X conditionnelle à $\{X + Y = n\}$. Préciser le nom de cette loi.
Corrigé : Pour tous $0 \leq i \leq n$,

$$P(X = i | X + Y = n) = \frac{P(X = i, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = i, Y = n - i)}{P(X + Y = n)} = \frac{(1-\alpha)^2 \alpha^n}{(n+1)(1-\alpha)^2 \alpha^n}.$$

En conclusion, la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = n\}$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Exercice 3. Pour tout nombre réel λ, on définit l'application f_λ sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t < \lambda, \\ e^{-(t-\lambda)}, \text{ si } t \geq \lambda. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout nombre réel λ, l'application f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
Corrigé : L'application f_λ est positive et continue sauf au point λ. Il reste donc à montrer que $\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(t)dt = 1$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(t)dt = \int_{\lambda}^{\infty} e^{-(t-\lambda)}dt \text{ le changement de variables } y = t - \lambda, \text{ donne } \int_0^{\infty} e^{-y}dy = 1,$$

car c'est l'intégrale de la densité de la loi $\varepsilon(1)$. L'application f_λ est donc bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2. Soit X_0 une variable aléatoire de densité f_λ. Calculer son espérance $E[X_0]$ et sa variance $Var(X_0)$.
Corrigé : Par la suite on fera le changement de variables $y = t - \lambda$.

$$E[X_0] = \int_{\lambda}^{\infty} te^{-(t-\lambda)}dt = \int_0^{\infty} (y + \lambda)e^{-y}dy = \int_0^{\infty} (y + \lambda)e^{-y}dy = E[Y] + \lambda = 1 + \lambda.$$

où évidemment nous avons considéré que la v.a. Y suit la loi $\varepsilon(1)$.

$$E[X_0^2] = \int_\lambda^\infty t^2 e^{-(t-\lambda)}dt = \int_0^\infty (y+\lambda)^2 e^{-y}dy = \int_0^\infty (y^2+2y\lambda+\lambda^2)e^{-y}dy$$
$$= E[Y^2] + 2\lambda E[Y] + \lambda^2 = 1 + (1+\lambda)^2,$$

où nous avons considéré que la v.a. Y suit la loi $\varepsilon(1)$. Finalement, on en déduit que $Var(X_0) = 1$.

3. Déterminer la fonction de répartition F_0 de X_0.
Corrigé : Soit $t \in \mathbb{R}$.
$$F_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \lambda, \\ \star, & \text{si } t \geq \lambda. \end{cases}$$
Pour $t \geq \lambda$, on doit déterminer $F_0(t)$.
$$F_0(t) = \int_\lambda^t e^{-(x-\lambda)}dx = \int_0^{t-\lambda} e^{-y}dy = 1 - e^{-(t-\lambda)}.$$
Ainsi, $F_0(t) = \left(1 - e^{-(t-\lambda)}\right) 1_{\{t \geq \lambda\}}$.

4. Soit $n \geq 1$ et $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et ayant la même loi que X_0. On pose $U_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.
   (a) Pour tout nombre réel t, calculer $P(U_n > t)$. En déduire la densité de U_n.
   Corrigé : Soit $t \in \mathbb{R}$, alors : $P(U_n > t) = P(\min(X_1, \ldots, X_n) > t) = P(X_1 > t) \times \ldots \times P(X_n > t)$ puisque les v.a. X_i sont indépendantes, d'où
   $$P(U_n > t) = (1 - F_0(t))^n.$$
   Soit G_0 la fonction de répartition de U_n. Alors, d'après ce qui précède et la question 3, on a
   $$G_0(t) = 1 - P(U_n > t) = 1 - (1 - F_0(t))^n = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \lambda, \\ 1 - e^{-n(t-\lambda)}, & \text{si } t \geq \lambda. \end{cases}$$
   L'application G_0 est continue en tout point de $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point sauf en λ. On en déduit que U_n admet une densité, que l'on notera g_λ,
   $$g_\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \lambda, \\ ne^{-n(t-\lambda)}, & \text{si } t \geq \lambda. \end{cases}$$
   (b) Montrer que $M_n - 1$ et $U_n - \frac{1}{n}$ ont la même espérance.
   Corrigé : En utilisant la linéarité de l'espérance et le fait que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ ont la même loi que X_0, nous avons $E[M_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i] = \lambda + 1$. Ainsi $E[M_n - 1] = \lambda$ et $E[U_n] = \int_{\mathbb{R}} g_\lambda(t)dt = \int_\lambda^{+\infty} tne^{-n(t-\lambda)}dt = \frac{1}{n} + \lambda$.

Exercice 4. Un athlète s'entraîne au saut en hauteur : la barre est d'abord fixée à 1m 90, et l'athlète effectue des sauts successifs jusqu'à ce qu'il parvienne à la franchir. Puis la barre est placée à 2m pour les essais suivants, et l'athlète effectue à nouveau des sauts jusqu'à parvenir à franchir la nouvelle hauteur. Pour $n \geq 1$, on note X_n la hauteur du saut de l'athlète au n-ième essai, et on suppose que les X_n sont des variables indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[1.60; 2.10]$, exprimé en mètres. Une barre est franchie lorsque la hauteur du saut est supérieure ou égale à la hauteur de la barre. Remarque : Il n'est pas nécessaire d'effectuer les divisions.

1. Quelle est la probabilité que la barre à 1m90 (noté 1.90) soit franchie lors du premier essai ?
Corrigé. Le saut de l'athlète suit une loi uniforme sur $[1.60; 2.10]$, donc la probabilité qu'il franchisse la hauteur 1.90 vaut $P(X_1 \geq 1.90) = \frac{2.10-1.90}{2.10-1.60} = \frac{2}{5}$. Car la densité de X_1 vaut $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2.10-1.60} = 2, \text{ si } 1.60 \leq t \leq 2.10, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ On a donc $P(X_1 \geq 1.90) = \int_{1.90}^{2.10} 2dt = \frac{2}{5}$.
2. On note Y le nombre d'essais nécessaires pour franchir la barre à 1.90. Quelle est la loi de Y ?
Corrigé. Puisque les hauteurs des sauts X_n sont indépendants et de même loi, Y correspond donc au rang du premier succès lors de la répétition d'expériences identiques et de même probabilité $p = 2/5$. Donc Y suit la loi géométrique de paramètre $p = 2/5$.
3. On note Z le nombre d'essais nécessaires pour franchir la barre à 2m (comptés à partir du moment où la première barre à 1.90 a déjà été franchie). Quelle est la loi de Z ?
Corrigé. Calculons d'abord la probabilité de franchir la barre 2m lors d'un essai
$$P(X_1 \geq 2.00) = \frac{2.10 - 2.00}{2.10 - 1.60} = \frac{1}{5}.$$
Z correspond au rang du premier succès lors de la répétition d'expériences identiques et de même probabilité $q = \frac{1}{5}$ donc Z suit la loi géométrique de paramètre $q = \frac{1}{5}$.
4. Calculer $P(Z \leq k)$ pour tout $k \geq 1$.
Corrigé.
$$P(Z \leq k) = \sum_{n=1}^{k} P(Z = n) = \sum_{n=1}^{k} q(1-q)^{n-1} = q\sum_{n=1}^{k}(1-q)^{n-1} = 1 - (1-q)^k = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^k.$$
5. Calculer $P(Y + Z \leq 3)$. (indication : conditionner par rapport à $Y = 1$ et $Y = 2$.)
Corrigé.$\{Y + Z \leq 3\}$ signifie que l'athlète a franchit les deux barres en 3 sauts ou moins, ce qui implique qu'il a franchit la première barre au premier ou au deuxième saut. Donc
$$P(Y+Z \leq 3) = P(Y+Z \leq 3|Y=1)P(Y=1) + P(Y+Z \leq 3|Y=2)P(Y=2)$$
$$= P(1+Z \leq 3|Y=1)P(Y=1) + P(2+Z \leq 3|Y=2)P(Y=2)$$
$$= P(Z \leq 2|Y=1)P(Y=1) + P(Z \leq 1|Y=2)P(Y=2) = P(Z \leq 2)P(Y=1) + P(Z \leq 1)P(Y=2)$$
car Y et Z sont indép. Donc $P(Y+Z \leq 3) = (1-(1-q)^2)p + (1-(1-q))p(1-p) = 24/125$.
6. A présent l'athlète passe une épreuve officielle. Il dispose en tout de trois essais pour franchir les deux hauteurs c.a.d. 1m90 et 2m. Par exemple s'il franchit 1m90 à son deuxième essai, il ne lui reste alors qu'un essai pour franchir 2m. L'athlète sera qualifié s'il parvient à franchir la barre à 2m.
   (a) Quelle est la probabilité que l'athlète soit qualifié ?
   Corrigé. L'athlète est qualifié s'il franchit les deux hauteurs en trois essais au plus, ce qui correspond exactement à $\{Y + Z \leq 3\}$. La probabilité qu'il se qualifie est donc de $P(Y + Z \leq 3) = \frac{24}{125}$.
   (b) Est-ce qu'il aurait plus de chance de se qualifier si la barre était placée à 2m dès le premier essai, avec trois essais pour la franchir ?
   Corrigé. Si la barre était placée à 2m dès le premier essai, avec trois essais au plus pour la franchir, alors la probabilité qu'il se qualifie serait égale à $P(Z \leq 3) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125} = 0.488$. Il aurait donc beaucoup plus de chances de se qualifier.