Final - SY01/A19. Durée 2 heures, 2 pages, 4 exercices.

Seul document autorisé : Formulaire manuscrit. Calculatrices interdites.
Barème indicatif :x, y, z, t.
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. Soit Y une variable aléatoire (v.a.) de loi de Bernoulli de paramètre p (notée $B(p)$). Soit X_1 (respectivement X_2) une v.a. de densité f_1 et de moyenne μ_1 (respectivement f_2 et de moyenne μ_2). On suppose que la v.a. Y est indépendante des v.a. X_i, $i \in \{1, 2\}$. On définit $X = YX_1 + (1 - Y)X_2$.
   (a) Exprimer la fonction de répartition de X en fonction de p et des fonctions de répartition de X_1 et de X_2.
   Corrigé : $P(X \leq x) = P(YX_1 + (1-Y)X_2 \leq x | Y = 0)P(Y = 0) + P(YX_1 + (1-Y)X_2 \leq x | Y = 1)P(Y = 1) = (1 - p)P(X_2 \leq x) + pP(X_1 \leq x)$, où dans la dernière égalité nous avons utilisé l'indépendance.
   (b) Exprimer $E[X]$ en fonction de p, μ_1 et μ_2.
   Corrigé : De la question précédente on a que la densité de X est donnée par $f(x) = pf_1(x) + (1 - p)f_2(x)$. D'où $E[X] = p\mu_1 + (1 - p)\mu_2$.
2. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $E(\frac{1}{\lambda})$ avec $\lambda > 0$, i.e. admettant la densité f définie par :
$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x} 1_{]0,+\infty[}(x).$$
   (a) Calculer la fonction de répartition F de X.
   Corrigé :
$$F(x) = (1 - e^{-x/\lambda}) 1_{]0,+\infty[}(x).$$
   (b) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(X \leq x | a < X < b)$.
   Corrigé : $G(x) = 0$ pour $x \leq a$, sinon
$$G(x) = \frac{P(a < X < \min(x, b))}{P(a < X < b)} = \frac{e^{-a/\lambda} - e^{-x/\lambda}}{e^{-a/\lambda} - e^{-b/\lambda}} 1_{]a,b[}(x) + 1_{[b,+\infty[}(x).$$
3. Soient $X_1, \ldots, X_{1000}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $]0, 1[$. Soit M le nombre d'entre elles comprises entre $1/4$ et $3/4$.
   Indication $\Phi(4/\sqrt{10}) \approx 0.8962$.
   (a) Déterminer la loi de M.
   Corrigé : On peut poser $M = \sum_{i=1}^{1000} 1_{[0.25,\ 0.75]}(X_i)$, ainsi M suit la loi $B(1000, 0.5)$, de moyenne 500 et de variance 250.
   (b) Déterminer par approximation normale $P(|M - 500| > 20)$. Justifier votre réponse.
   Corrigé :
$$P(|M - 500| > 20) = P(|\frac{M - 500}{\sqrt{250}}| > \frac{20}{\sqrt{250}}) \approx P(|X| > \frac{4}{\sqrt{10}})$$
   où l'approximation de la probabilité est due au Théorème de la limite centrale. Or
$$P(|X| > \frac{4}{\sqrt{10}}) = 2(1 - \Phi(4/\sqrt{10})) \approx 0.21.$$

D'où
$$P(|M-500|>20)\approx 0.21.$$

Exercice 2. On suppose que le nombre de blessés arrivant à un service des urgences un jour donné suit la loi de Poisson de moyenne 6. Sachant que les victimes potentielles sont réparties équitablement entre les deux sexes, on note X le nombre de femmes qui figurent parmi les blessés et Y le nombre d' hommes.

a- On note $n\geq 0$ le nombre de personnes arrivées aux services des urgences et k le nombre de femmes.
Calculer $P(X=k|X+Y=n)$. De quelle loi s'agit-il ?
Corrigé : n étant le nombre de personnes arrivées, nous avons $P(X=k|X+Y=n)=C_n^k\frac{1}{2^n}$ pour $0\leq k\leq n$ i.e. la loi est une $B(n,1/2)$.

b- Etablir les lois de probabilités de X et Y.
Corrigé : $P(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=k|X+Y=n)P(X+Y=n)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(X=k|Y=n-k)P(X+Y=n)$ d'où $P(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{2^n(n-k)!k!}\times\frac{6^ne^{-6}}{n!}=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{6^ne^{-6}}{2^n(n-k)!k!}=e^{-6}\frac{3^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{3^{n-k}}{(n-k)!}=e^{-6}\frac{3^k}{k!}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{3^l}{l!}=e^{-6}\frac{3^k}{k!}e^3=e^{-3}\frac{3^k}{k!}$. Il s'agit donc de la loi de Poisson de paramètre 3.

c- Donner l'espérance mathématique de X et Y, ainsi que leurs écarts-types.
Corrigé : $E[X]=E[Y]=3$ et $Var(X)=Var(Y)=3$.

d- Evaluer $P(X=k,\ X+Y=k+h)$, et en déduire que X et Y sont indépendantes.
Corrigé : $P(X=k,\ X+Y=k+h)=P(X=k|X+Y=k+h)P(X+Y=k+h)=C_{k=h}^k(\frac{1}{2})^{h+k}e^{-6}\frac{6^{(k+h)}}{(h+k)!}$ d'où $P(X=k,\ X+Y=k+h)=e^{-6}\frac{3^k3^h}{k!h!}=P(X=k)P(Y=h)$.

e- Quel type d' événement(s) nous permettrait de calculer la probabilité qu'il y ait autant d'hommes que de femmes admis aux urgences ?
Indication : On ne demande pas de faire les calculs.
Corrigé : les événements du type $\{X=Y\}$ et il faudrait calculer
$P(X=Y)=\sum_{k\in\mathbb{N}}P(X=k)P(Y=k)$.

Exercice 3. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de loi absolument continue dont la densité f est donnée par
$$f(x,y)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(4x^2+2xy+y^2)},\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$
Indication : On pourra utiliser la densité d'une v.a. de loi $N(m,\sigma^2)$.

1. Déterminer la densité f_X de la v.a. X. En déduire le nom et les caractéristiques de la loi de X.
Corrigé :
$$f_X(x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(4x^2+2xy+y^2)}dy=\frac{\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}x^2}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{1}{2}(y+x)^2}dy$$
or
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(y+x)^2}$$
est la densité d'une v.a. de loi $N(-x,1)$, donc son intégrale vaut 1. Ainsi,
$$f_X(x)=\frac{\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}x^2}}{2\pi},$$
et donc X suit la loi $N(0,1/3)$.

2. Déterminer la densité f_Y de la v.a. Y. En déduire le nom et les caractéristiques de la loi de Y.
Corrigé :
$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{3}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(4x^2+2xy+y^2)} dx = \frac{\sqrt{3}e^{-\frac{3}{8}y^2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{4}{2}(x+\frac{y}{4})^2} dx,$$
or
$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{4}{2}(x+\frac{y}{4})^2}$$
est la densité de loi $N(-y/4, 1/2)$, d'où la v.a. Y admet pour densité $f_Y(y) = \frac{\sqrt{3}e^{-\frac{3}{8}y^2}}{2\sqrt{2\pi}}$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Y suit la loi $N(0, 4/3)$.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
Corrigé : Les v.a. ne sont pas indépendantes car
$$f_{(X,Y)}(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tournez la page !

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p $(0 < p < 1)$. On pose $U = X + Y$ et $V = XY$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V), on indiquera l'ensemble de valeurs que le couple (U, V) peut prendre.
Corrigé : Remarquons que $U(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $V(\Omega) = \{0, 1\}$. Donc le couple a des valeurs dans $U(\Omega) \times V(\Omega)$. Ainsi pour tout $(x, y) \in U(\Omega) \times V(\Omega)$, on doit déterminer $P(U = x, V = y)$.
   –
$$P(U = 0, V = y) = P(X+Y = 0, XY = y) = \begin{cases} P(X = 0, Y = 0, XY = y) = (1-p)^2, & \text{si} \quad y = 0, \\ 0 & \text{si} \quad y = 1. \end{cases}$$
   –
$$\begin{aligned} P(U = 1, V = y) &= P(X+Y = 1, XY = y) = P(X = 0, Y = 1, XY = y) + P(X = 1, Y = 0, XY = y) \\ &= \begin{cases} P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = 2p(1-p), & \text{si} \quad y = 0, \\ 0 & \text{si} \quad y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$
   –
$$\begin{aligned} P(U = 2, V = y) &= P(X + Y = 2, XY = y) = P(X = 1, Y = 2, XY = y) \\ &= \begin{cases} P(X = 1, Y = 1) = p^2, & \text{si} \quad y = 1, \\ 0 & \text{si} \quad y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2. En déduire les lois marginales de U et V.
Corrigé : Par la formule de probabilités totales on a
$$P(U = x) = \sum_{y \in V(\omega)} P(U = x, V = y),$$
ainsi
$$P(U = 0) = P(U = 0, V = 0) + P(U = 0, V = 1) = (1-p)^2$$
$$P(U = 1) = P(U = 1, V = 0) + P(U = 0, V = 1) = 2p(1-p)$$
$$P(U = 2) = P(U = 2, V = 0) + P(U = 2, V = 1) = p^2.$$
Par ailleurs, on reconnait que V suit loi $B(p^2)$.

3. Calculer de deux manières différentes l'espérance de U notée $E[U]$), ainsi que celle de V, notée $E[V]$.
Corrigé : Par les lois marginales on a

$$E[U] = 2p(1-p) + 2p^2 = 2p \text{ et } E[V] = p^2.$$

Par définition des v.a. on a

$$E[U] = E[X] + E[Y] = 2p \text{ et } E[V] = E[X]E[Y] = p^2.$$

4. Calculer $Cov(U, V)$. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
Corrigé : Par définition, on a

$$Cov(U, V) = E[UV] - E[U]E[V] = E[(X+Y)XY] - 2p^3 = E[X^2]E[Y] + E[Y^2]E[X] - 2p^3 = 2p^2(1-p).$$

Les variables U et V ne sont pas indépendantes, car si elles l'étaient leur covariance serait nulle (attention, la réciproque est fausse), ce qui n'est pas satisfait pour le p de l'énoncé qui satisfait $0 < p < 1$.