TD 1 - Séance 1 du Chapitre 1 - A23

ETD-1-1 Soient A, B et C des parties d'un ensemble E.

a- simplifier: $A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C)$;

Corrigé : Bien remarquer que $A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \phi \cup (A \cap B) = (A \cap B)$, par ailleurs on peut réecrire le troisième terme $(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) = \overline{(A \cap B)} \cup C$. Finalement nous avons

$$A \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) = (A \cap B) \cap (\overline{(A \cap B)} \cup C) = \phi \cup (A \cap B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

b- simplifier: $(A \cup (\overline{A} \cap B)) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$;

Corrigé : $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$, et le troisième terme peut s'écrire comme $\overline{A \cup B} \cap C$. Finalement

$$(A \cup (\overline{A} \cap B)) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = (A \cup B) \cup (\overline{A \cup B} \cap C) = E \cap (A \cup B \cup C) = A \cup B \cup C.$$

c- montrer que : $(A \cup B \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) = (A \triangle B) \cup C$.

Corrigé : On peut suivre une démarche analogue. En partant du terme de droite, nous avons

$$\begin{aligned}
(A \triangle B) \cup C &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup C = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \cup C \\
&= \left((A \cap \overline{B}) \cup B\right) \cap \left((A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}\right) \cup C \\
&= \left(\left((A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)\right) \cap \left((A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})\right)\right) \cup C \\
&= \left((A \cup B) \cap \left(\overline{B} \cup \overline{A}\right)\right) \cup C = (A \cup B \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C)
\end{aligned}$$

ETD-1-2 Dire, en justifiant votre réponse, si les ensembles suivants sont dénombrables ou pas.

a- Les entiers relatifs pairs;

Corrigé : On peut définir l'application telle que $\phi(x) = x$ si x est un entier pair et $\phi(x) = -x - 1$ si x est un entier impair. Cette application définit bien une bijection entre $\mathbb{N}$ et les entiers relatifs pairs.

b- Les nombres rationnels ($\mathbf{Q}$);

Corrigé : On peut écrire $\mathbf{Q} = \cup_{i \in \mathbb{N}^*} E_i$ où $E_i = \{\ldots, \frac{-2}{i}, \frac{-1}{i}, \frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \ldots\}$. Comme les E_i sont dénombrables leur réunion aussi.

c- Le segment $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$.

Corrigé : Supposons que $[0, 1]$ est dénombrable, c.a.d. qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$. On partage $[0, 1]$ en trois intervalles $[0, 1] = [0, 1/3] \cup [1/3, 2/3] \cup [2/3, 1]$. L'un au moins de ces intervalles ne contient pas $f(0)$. Désignons par I_0 un tel intervalle, qu'on divise encore en trois intervalles fermés. De cette façon on peut construire un système d'intervalles fermés emboités tel que

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n$$

et telle que $f(i)$ n'appartienne pas à I_i pour $0 \leq i \leq n$. En généralisant ce raisonnement On a construit un système d'intervalles fermés et emboités telle que $f(n)$ n'appartienne pas à I_n pour tout entier n, alors

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [0,1] \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n) = f(\mathbb{N}) \cap (\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n) = \emptyset.$$

Or, toute suite d'intervalles fermés emboîtés de $\mathbb{R}$ contient au moins un nombre réel, donc $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. La réalisation simultanée de ces deux égalités est absurde, donc la fonction f ne peut pas être bijective.

ETD-1-3 Soit $\mathcal{F}$ une σ-algèbre de sous-ensembles de Ω et soit $B \in \mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{R}_B = \{A \cap B \ : \ A \in \mathcal{F}\}$ est une σ-algèbre de sous-ensembles de B.

Corrigé:

- $B \in \mathcal{R}_B$ car $B = B \cap B$;
- Soit $A \in \mathcal{F}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre. Si $A \cap B \in \mathcal{R}_B$ a-t-on $\overline{A \cap B} \in \mathcal{R}_B$? La réponse est oui, car $\overline{A \cap B} = B \setminus (A \cap B) = \bar{A} \cap B$. Bien remarquer que le complémentaire de $A \cap B$ est par rapport à B, par contre le complémentaire de A est par rapport à Ω;
- Soient $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ alors $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots \in \mathcal{R}_B$. Nous devons donc montrer que la réunion est dans $\mathcal{R}_B$ or $\cup_{n\geq 1}(A_n \cap B) = (\cup_{n\geq 1} A_n) \cap B \in \mathcal{R}_B$ car $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

ETD-1-36 a- Déterminer Ω dans les cas suivants :

i- tirer une pièce trois fois.

ii- deux balles sont tirées sans remise d'une urne contenant deux balles rouges et deux balles bleues.

iii- lancer une pièce jusqu'à l'obtention de pile.

b- Montrer que si A et B sont deux événements d'une même tribu alors $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$ et $A \Delta B$ sont aussi dans la tribu.

c- Soit A un événement, montrer que si $P(A)$=0 ou 1 alors A est indépendant de tous les autres événements.

Corrigé:

a- i- $\{p, f\}^3 = \{\omega = (u_1, u_2, u_3) : u_i \in \{p, f\}, i = 1, \ldots, 3\}$

ii- $\{rr, bb, br, rb\} = \{r, b\}^2$

iii- $\{p, fp, ffp, fffp, ffffp, \cdots, \infty\} = \{\{f\}^n \times \{p\}, n \in \mathbb{N}\}$
$= \{\omega = (u_1, \ldots, u_n) : u_i = f, i = 1, \ldots, n-1, u_n = p, n \in \mathbb{N}\}$

b- A et B étant des événements d'une même tribu $\mathcal{F}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi dans $\mathcal{F}$, et comme $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B$, on peut conclure. $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$ or $A, B, \bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{F}$ et une tribu est stable par réunion et intersection, donc $A \Delta B \in \mathcal{F}$.

c- Soit B un autre événement (quelconque) si $P(A) = 0$ alors $P(A \cap B) = 0$ car $A \cap B \subset A$ d'où $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Lorsque $P(A) = 1$, nous avons $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}))$ et comme $P(B \cap \bar{A}) = 0$ on a le résultat.