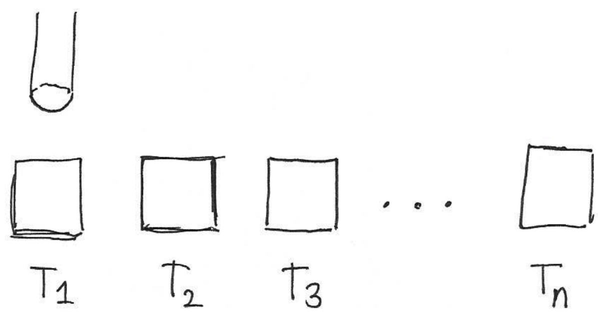
TD 3 - Séance 3 du Chapitre 1 - A23

ETD-1-23 Un distributeur automatique de billes reçoit ses ordres sous forme d'une suite de "bits" 0 ou 1 qu'il lit de gauche à droite. Il est positionné au départ au-dessus du premier tiroir T_1 d'une suite de n tiroirs.
Tout 0 déclenche la chute d'une bille, tout 1 provoque le déplacement, sans chute de bille, de l'automate au-dessus du tiroir suivant. Les billes sont indiscernables.

I- Quel nombre N de bits 0 ou 1 doit contenir le code donné à la machine pour qu'en fin d'exécution elle soit positionnée sur le $n^{\text{ème}}$ tiroir et ait distribué exactement p billes ?

Corrigé: Il suffit de faire un dessin comme ci-dessous de l'état initial du distributeur et de voir qu'il faut $n-1$ "1" car le distributeur avance avec des "1" et on part de T_1 pour finir en T_n, et p "0" car il a distribué p billes. Alors $N = n - 1 + p$.



II- En supposant que tous ces codes à N bits puissent être choisis avec la même probabilité, calculer la probabilité des événements suivants :

a- A_k : "il y a k billes dans T_1 et $p-k$ billes dans T_n" pour $k \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$,

Corrigé: Nous pouvons définir $\Omega = \{\omega = (b_1, b_2, \ldots, b_N) : b_i \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{N} b_i = n-1\}$ pour modéliser cette expérience. Combien d'éléments différents contient Ω ? Il suffit de choisir les positions des p "0" parmi les $n-1+p$ positions du code, donc nous avons $|\Omega| = C_{n-1+p}^{n-1}$.

Remarque : Ce problème est équivalent à celui de l'exercice 1.9, donc il s'agit d'une autre manière de reçoudr l'exercice 1.9.

Ensuite, l'évènement d'intérêt ici est $A_k = \{\omega \in \Omega : b_1 = \ldots = b_k = 0,\ b_{k+1} = \ldots = b_{k+n-1} = 1,\ b_{k+n} = \ldots = b_N = 0\}$, contenant un seul évènement élémentaire, donc $P(A_k) = \frac{1}{C_{n+p-1}^{p}}$.
Bien remarquer que cette probabilité ne dépends pas de k, vu que chaque élément de Ω a la même probabilité.

b- B : "tous les tiroirs sont vides sauf T_1 et T_n entre lesquels sont réparties les p billes",

Corrigé: On peut poser la suite d'événements (deux à deux disjoints)
$A_p = \{$ toutes les billes sont dans $T_1\}$
$A_{p-1} = \{p-1$ billes dans T_1 et 1 bille dans $T_n\}$

ainsi de suite, jusqu'à
$A_0 = \{$ toutes les billes sont dans $T_n\}$.
Clairement A_p et A_0 ne contribuent pas à la réalisation de B, ainsi

$$P(B) = P\left(\cup_{k=1}^{p-1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p-1} P(A_k) = \frac{p-1}{C_{n+p-1}^p}.$$

c- C : "tous les tiroirs sont vides sauf deux entre lesquels sont réparties les p billes",
Corrigé: Soit $B_{i,j} = \{$Tous les tiroirs sont vides sauf T_i et $T_j\}$, ainsi
$C = \bigcup_{1\le i<j\le n} B_{i,j}$ et $P(C) = C_n^2 P(B) = C_n^2 \frac{p-1}{C_{n+p-1}^p}$.

d- D : "il y a au moins une bille dans chacun des n tiroirs" (ceci pour $p \ge n$).
Corrigé: On peut rapidement remarquer que n billes sont placées et qu'il reste $p-n$ à placer. Ainsi un raionnement analogue à celui du début conduit à

$$P(D) = \frac{C_{p-n+n-1}^{p-n}}{C_{n+p-1}^p} = \frac{C_{p-1}^{p-n}}{C_{n+p-1}^p}.$$

ETD-1-8 Dans une entreprise pharmaceutique, la production d'une variété d'ampoules est assurée par n machines, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ $n \ge 2$, dans des proportions respectives $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. On sait d'autre part que les proportions respectives d'ampoules défectueuses fabriquées par ces machines sont respectivement $p_1, p_2, \ldots, p_n$. On choisit au hasard dans la production de ces n machines une ampoule et on constate qu'elle n'est pas défectueuse. Calculer la probabilité que cette ampoule ait été fabriquée par la machine M_k $(1 \le k \le n)$.
Corrigé: Nous pouvons modéliser cette expérience par l'espace fondamental $\Omega = \{\omega = (d,i)$ ou $\omega = (n,i), i = 1,2,\ldots,n\}$, correspondant aux pièces défectueuses ou non fabriquées par chaque machine. Il ne s'agit pas d'un cadre d'équiprobabilité.

On notera $A = \{$pièce défectueuse$\}$ et $M_k = \{$pièce produite par la machine $k\}$. On a

$$P(M_k|\bar{A}) = \frac{P(M_k \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(M_k)P(\bar{A}|M_k)}{P(M_1)P(\bar{A}|M_1) + \ldots + P(M_n)P(\bar{A}|M_n)} = \frac{\alpha_k(1-p_k)}{\sum_{i=1}^n \alpha_i(1-p_i)}.$$

Bien remarquer qu'on a utilisé la formule des probabilités totales au dénominateur, et aussi que $P(\bar{A}|M_k) = 1 - P(A|M_k) = 1 - p_k$.

ETD-1-13 (*Problème des rencontres*). Un monsieur distrait écrit n lettres différentes à n personnes distinctes et ferme les enveloppes avant d'avoir écrit les adresses, qu'il inscrit ensuite au hasard. Quelle est la probabilité qu'un destinataire au moins reçoive la lettre qui lui était destinée ?
Corrigé: On pourrait passer par le calcul de la probabilité de l'evénement complémentaire, mais c'est assez compliqué pour n grand. Or, le calcul direct grâce à la formule de Poincaré est plus simple.
Posons les évènements $A_i = \{$ La i-eme personne reçoit sa lettre $\}$, pour $i = 1, \ldots n$, alors $\bigcup_{i=1}^n A_i = \{$ un destinataire au moins reçoit sa lettre $\}$ est l'évènement d'intérêt. Un événement élémentaire est une permutation de $\{1,2,\ldots,n\}$ et $\Omega = \{$l'ensemble des permutations$\}$.

$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$, ce qui correspond au cas où la i-éme lettre arrive à son destinataire, et les autres peuvent arriver de $(n-1)!$ façons différentes.
$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$, ce qui correspond au cas où la i-éme et la j-ème lettre arrivent à leur

destinataire, et les autres peuvent arriver de $(n-2)!$ façons différentes.
Plus généralement $P\left(A_{i_1},\ldots,A_{i_k}\right)=\frac{(n-k)!}{n!}$, et finalement
$P\left(A_1,\ldots,A_n\right)=\frac{1}{n!}$.
Bien remarquer que lorsqu'on a n lettres et n destinataires, les indices des A_i vont de 1 à n.

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{(n-2)!}{n!}+\ldots+\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}(-1)^{k+1}\frac{(n-k)!}{n!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\\
&= 1-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+\ldots+(-1)^{k+1}C_n^k\frac{(n-k)!}{n!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\\
&= 1-\frac{1}{2}+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}.
\end{aligned}
$$

Remarques : la somme $\sum_{1\leq i<j\leq n}$ correspond au comptage de tous les entiers i et j différents entre 1 et n et tels que l'odre compte (échantillons ordonnés sans répétition de 2 éléments parmi n), ce qui se traduit par C_n^2 car la somme n'agit que sur les indices et non pas sur la fraction $\frac{(n-2)!}{n!}$. Il en est de même pour les autres sommes.

ETD-1-14 On effectue une expérimentation sur le comportement des rats, consistant à les faire choisir entre deux portes A et B. Si le rat choisit la porte A, il reçoit une décharge électrique et la porte reste fermée ; s'il choisit la porte B, elle s'ouvre et le rat sort.
On constate expérimentalement qu'il y a deux types de rats : la probabilité conditionnelle pour qu'un rat sorte par la porte B au k^e essai, sachant qu'il a échoué $k-1$ fois à la porte A, est $p_k=1/2$ pour les rats du type I (rats sans mémoire) et est $q_k=k/(k+1)$ pour les rats de type II (rats avec mémoire).

a- Calculer, pour le type I et le type II, les probabilités P_n et Q_n qu'un rat sorte au n^e essai.
Corrigé: Soit $\Omega=\{\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_k):\omega_i\in\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}, i=1,\ldots,k; k\in\mathbb{N}^*\}$ un espace fondamental qui modélise cette expérience (on ne précise pas combien de fois est répétée l'expérimentation).
Soient les évènements d'intérêt suivants : $E_i=\{$Le rat choisit la porte A au i-ème essai$\}$ et $\overline{E}_i=\{$Le rat choisit la porte B au i-ème essai$\}$. En appliquant la formule de probabilités composées, nous avons que

$$P\left(E_1,E_2,\ldots,\bar{E}_n\right)=P(\bar{E}_n|E_1,E_2,\ldots,E_{n-1})P(E_{n-1}|E_1,E_2,\ldots,E_{n-2})\times\ldots\times P(E_2|E_1)P(E_1).$$

Ainsi

$$P_n=(\frac{1}{2})^n,$$

ceci est du au fait que comme les rats du type I, n'ont pas de mémoire le conditionnement ne joue pas de rôle. Par contre pour les rats du Type II, chacune des probabilités doit être déterminée, ainsi

$$Q_n=\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{n}{(n+1)!}.$$

Bien remarquer qu'on a utilisé le fait que

$$P(E_j|E_1,\ldots,E_{j-1})=1-P(\bar{E}_j|E_1,\ldots,E_{j-1}).$$

b- On choisit au hasard un rat dans une population contenant 60% de rats du type I et 40% de rats du type II. Calculer la probabilité conditionnelle que le rat soit du type II sachant qu'il est sorti au n^e essai, pour les valeurs suivantes $n = 1$, 2, 3 et 4.

Corrigé: Soit $E = \{$ Le rat sort au n-ième esssai$\}$ et $F = \{$Rat du type II$\}$, on a donc

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F) + P(E|\bar{F})P(\bar{F})}$$

$$= \frac{Q_n \times 0.4}{Q_n \times 0.4 + P_n \times 0.6} = \frac{\frac{4n}{(n+1)!}}{\frac{4n}{(n+1)!} + \frac{6}{2^n}}.$$